1節 鋭角の三角比

1 直角三角形と三角比

正接，正弦，余弦

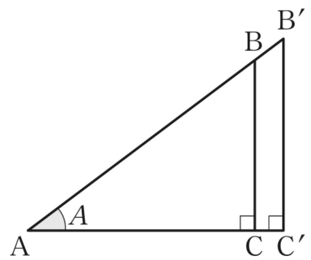
（教科書 p.118）

右の図において，△ABC と △AB′C′ は相似であるから

$AC : BC = AC' : B'C'$

よって $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$

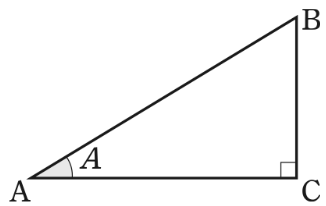
が成り立つ。



一般に，∠C が直角である直角三角形 ABC において，$\frac{BC}{AC}$ の値は △ABC の大きさに関係なく，∠A の大きさだけで定まる。∠A の大きさは A で表すことが多い。

$\frac{BC}{AC}$ を A の（1　　　　　）または（2　　　　　）といい，（3　　　　　）と書く。

正接の場合と同じように，∠C が直角である直角三角形 ABC において，$\frac{BC}{AB}$，$\frac{AC}{AB}$ の値はいずれも ∠A の大きさ A だけで定まる。

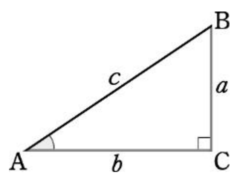


$\frac{BC}{AB}$ を A の（4　　　　　）または（5　　　　　）といい，（6　　　　　）と書く。

$\frac{AC}{AB}$ を A の（9　　　　　）または（10　　　　　）といい，（11　　　　　）と書く。

正接，正弦，余弦をまとめて（12　　　　　）という。

三角比
右の図の直角三角形 ABC において $\sin A = \frac{a}{c}$，　$\cos A = \frac{b}{c}$， $\tan A = \frac{a}{b}$

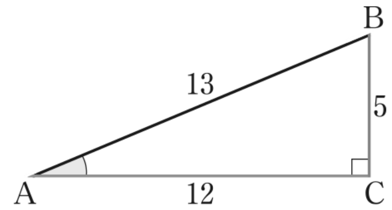


例 1 右の図の直角三角形において

$\sin A =$

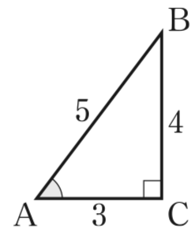
$\cos A =$

$\tan A =$

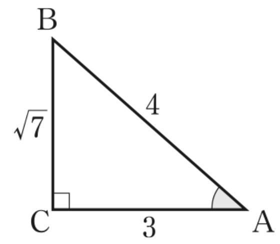


問1 次の図において，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

(1)



(2)

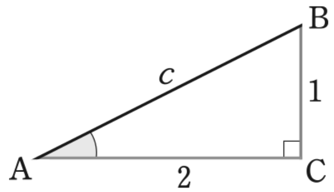


例 2 右の図の直角三角形において，斜辺 AB の長さを C とすると，三平方の定理により

$c^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

$c > 0$ より　$c = \sqrt{5}$

ゆえに



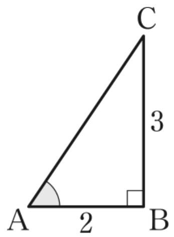
$\sin A =$

$\cos A =$

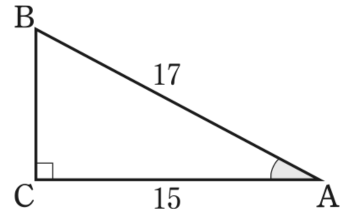
$\tan A =$

問 2 次の図において，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

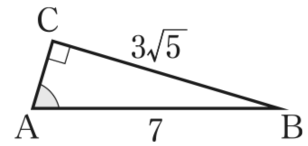
(1)



(2)



(3)



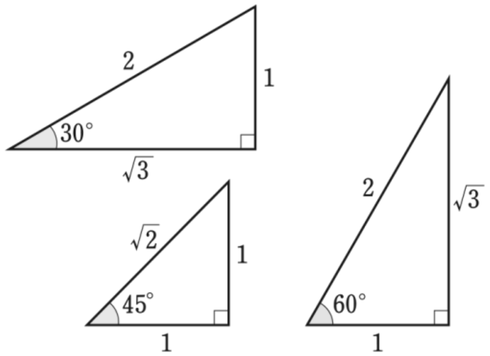
30°，45°，60°の三角比

（教科書 p.120）

30°，45°，60° の三角比の値は，下の図を用いて求めることができる。

これらの角の三角比の値を表にすると，下のようになる。

A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



三角比の表

（教科書 p.121）

207 ページの三角比の表に，0° から 90° まで 1° ごとの角に対する正弦，余弦，正接の値を小数第 4 位まで示した。

右の表はその三角比の表の一部である。

角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281

例 3 上の表から $\cos 48° =$ (　　　　　　)

また, $\sin A = 0.7986$ を満たす A は $A =$(　　　　　　)

問3 三角比の表から，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 15°$

(2)　$\cos 67°$

(3)　$\tan 38°$

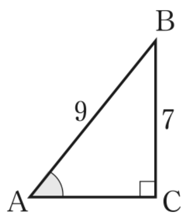
問4 三角比の表から，次の式を満たす A を求めよ。

(1)　$\sin A = 0.9659$　　(2)　$\cos A = 0.9205$　　(3)　$\tan A = 2.3559$

例 4 右の図の直角三角形において，A を求めてみよう。

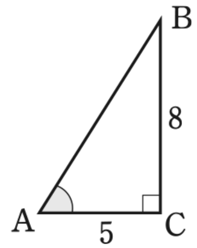
$\sin A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{7}{9} \fallingdotseq 0.7778$

正弦が 0.7778 に最も近い A を三角比の表から求めると

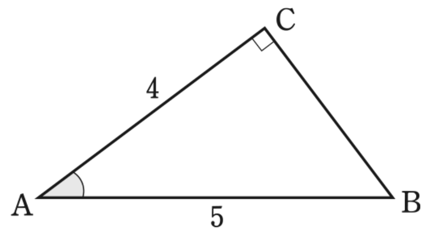


問5 三角比の表から，次の A を求めよ。

(1)



(2)

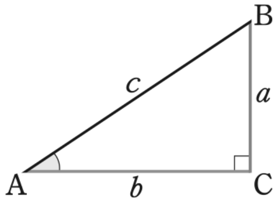


三角比の応用

（教科書 p.122）

三角比を利用して，いろいろな値を求めてみよう。

右の図の直角三角形 ABC において



$\sin A = \frac{a}{c}$，$\cos A = \frac{b}{c}$，$\tan A = \frac{a}{b}$

であるから，次の式が成り立つ。

$a =$（13　　　　　），$b =$（14　　　　　），$a =$（15　　　　　）

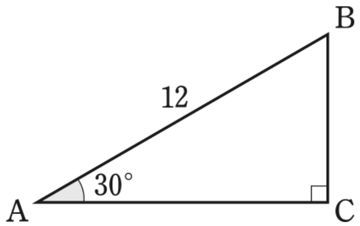
例 5 右の図の直角三角形において

$\mathrm{BC} = \mathrm{AB}\sin A$

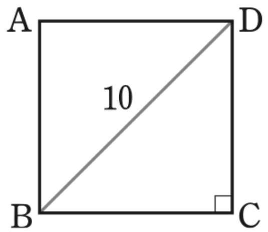
$= 12\sin 30° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$

$\mathrm{AC} = \mathrm{AB}\cos A$

$= 12\cos 30° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

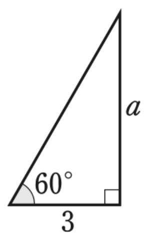


問6 正方形 ABCD において，BD = 10 のとき，BC の長さを求めよ。

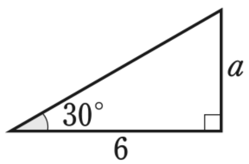


例 6 右の図の直角三角形において，a の値を求めてみよう。

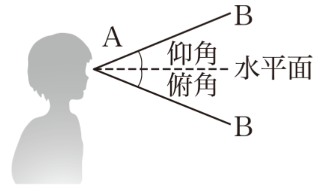
$a =$



問7 右の図の直角三角形において，a の値を求めよ。



右の図のように，点 A から点 B を見るとき，AB と A を通る水平面とのなす角を，B が水平面より上にあるならば（16　　　　　）といい，下にあるならば（17　　　　　）という。



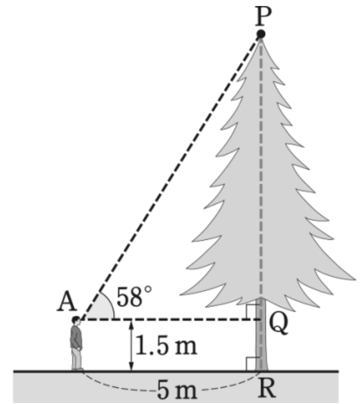
例題 1 平地に立っている木の根元から 5m 離れた地点に立って，木の上端を望むときの仰角，すなわち，右の図の ∠QAP は 58° であった。

目の高さを 1.5m とするとき，木の高さは何 m か。

ただし，$\tan 58° = 1.6$ とする。

解 上の図において，木の高さ PR は

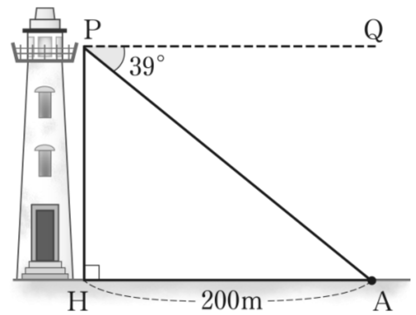
$\mathrm{PR} = \mathrm{PQ} + \mathrm{QR} =$



問8 展望台 P から地上の A 地点を見下ろすときの俯角，すなわち，右の図の ∠QPA は 39° であった。

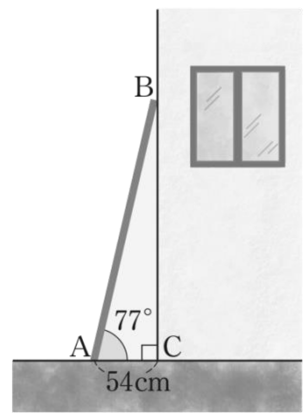
展望台から A 地点までの水平距離 AH が 200m であるとすると，展望台の高さ PH は何 m か。

ただし，$\tan 39° = 0.81$ とする。



問9 右の図のように，家の壁にはしご AB を立て掛けて，はしごと地面とのなす角 ∠BAC が 77° になるようにした。

はしごの下端 A と壁との距離 AC が 54cm であるとき，はしごの長さ AB を三角比の表を用いて求めよ。



2 三角比の相互関係

（教科書 p.124）

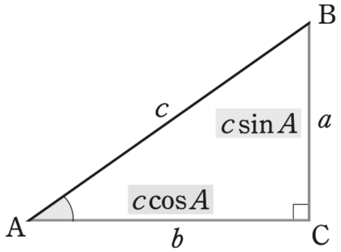
右の図の直角三角形において

$$a = c\ \sin A,\ b = c\ \cos A$$

である。

よって

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{c\sin A}{c\cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$



また，三平方の定理により，$a^2 + b^2 = c^2$ であるから

$$(c\sin A)^2 + (c\ \cos A)^2 = c^2$$

両辺を c^2 で割ると　$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

ふつう，$(\sin A)^2$，$(\cos A)^2$ をそれぞれ $\sin^2 A$，$\cos^2 A$ と書く。

以上より，次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係(1)
$\boldsymbol{\tan A = \frac{\sin A}{\cos A},\qquad \sin^2 A + \cos^2 A = 1}$

例題 2　A が鋭角で，$\cos A = \frac{5}{7}$ であるとき，$\sin A$，$\tan A$ の値を求めよ。

解　$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ であるから

$\sin^2 A =$

$\sin A > 0$ であるから

$\sin A =$

また　$\tan A =$

問 10　A が鋭角で，$\sin A = \frac{1}{3}$ であるとき，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

等式 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ の両辺を $\cos^2 A$ で割ると

$$\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}$$

ここで，$\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$ であるから，次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係(2)
$\boldsymbol{1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}}$

例題 3　A が鋭角で，$\tan A = 3$ であるとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

解　$1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$ であるから

$\frac{1}{\cos^2 A} =$

よって

$\cos A > 0$ であるから

$\cos A =$

また，$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ であるから

$\sin A$

問 11 A が鋭角で，$\tan A=\frac{1}{2}$ であるとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

90° −A の三角比

（教科書p.126）

$\sin 30°=\frac{1}{2}$，$\cos 60°=\frac{1}{2}$

$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

が成り立つ。

また，三角比の表をくわしく見ると，0° から 90° までの正弦の数値の配列を逆に並べたものは，0° から 90° までの余弦の数値の配列に一致している。

角	正弦(sin)	余弦(cos)
0°	0.0000	1.0000
1°	0.0175	0.9998
2°	0.0349	0.9994
3°	0.0523	0.9986
4°	0.0698	0.9976
5°	0.0872	0.9962
85°	0.9962	0.0872
86°	0.9976	0.0698
87°	0.9986	0.0523
88°	0.9994	0.0349
89°	0.9998	0.0175
90°	1.0000	0.0000

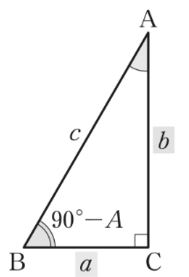
一般に，A と $90°-A$ の三角比の間にどのような関係があるかを調べてみよう。

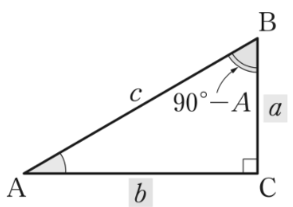
右の図の直角三角形において

$\sin B=\frac{b}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$

$\cos B=\frac{a}{c}$，$\sin A=\frac{a}{c}$

$\tan B=\frac{b}{a}$，$\tan A=\frac{a}{b}$





ここで　$B=90°-A$

であるから，次の公式が成り立つ。

90° − A の三角比

$$\boldsymbol{\sin(90°-A)=\cos A} \qquad \boldsymbol{\tan(90°-A)=\frac{1}{\tan A}}$$
$$\boldsymbol{\cos(90°-A)=\sin A}$$

この公式を用いると，鋭角の三角比を 45° 以下の角の三角比で表すことができる。

例 7 $\sin 63°=$

$\cos 63°=$

$\tan 63°=$

問 12 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

（1）　$\sin 56°$

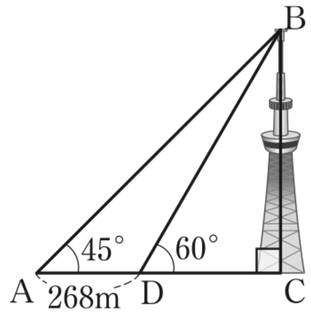
（2）　$\cos 87°$

（3）　$\tan 72°$

問 題

（教科書 p.127）

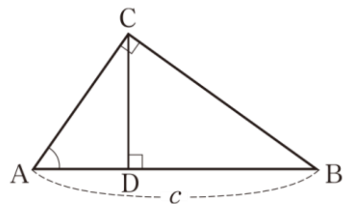
1 地面に垂直に建つ塔がある。塔から離れた地点 A において塔の先端 B の仰角を測ると 45° であり，そこから塔に 268m 近づいた地点 D での仰角は 60° である。
このとき，塔の高さは約何 m か。



2 右の図の直角三角形 ABC において

$\mathrm{AB} = c$

とおくとき，次の線分の長さを c と A の三角比を用いて表せ。



(1) BC

(2) CD

(3) DB

3 A が鋭角で，$\cos A = \frac{5}{13}$ であるとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin A$

(2) $\tan A$

(3) $\sin(90° - A)$

(4) $\cos(90° - A)$

4 △ABC の 3 つの角の大きさを A，B，C とする。このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$

(2) $\tan\frac{A+B}{2}\tan\frac{C}{2} = 1$