

1 節 鋭角の三角比

1 直角三角形と三角比

正接, 正弦, 余弦

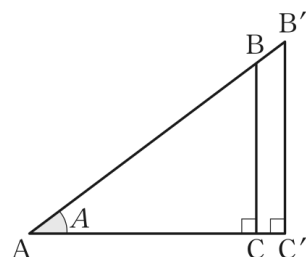
(教科書 p.118)

右の図において, $\triangle ABC$ と $\triangle AB'C'$ は相似であるから

$$AC : BC = AC' : B'C'$$

よって $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$

が成り立つ。

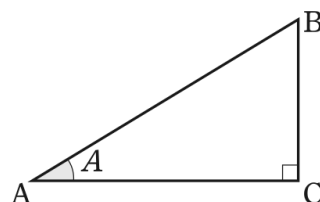


一般に, $\angle C$ が直角である直角三角形 ABC において, $\frac{BC}{AC}$ の値は $\triangle ABC$ の大きさに関係なく, $\angle A$ の大きさだけで定まる。 $\angle A$ の大きさは A で表すことが多い。

$\frac{BC}{AC}$ を A の (1 正接) または (2 タンジェント) といい, (3 $\tan A$) と書く。

正接の場合と同じように, $\angle C$ が直角である直角三角形 ABC において, $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$ の値はいずれも $\angle A$ の大きさ A だけで定まる。

$\frac{BC}{AB}$ を A の (4 正弦) または (5 サイン) といい,



(6 $\sin A$) と書く。

$\frac{AC}{AB}$ を A の (9 余弦) または (10 コサイン) といい, (11 $\cos A$) と書く。

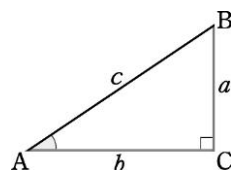
正接, 正弦, 余弦をまとめて (12 三角比) という。

三角比

右の図の直角三角形 ABC において

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c},$$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

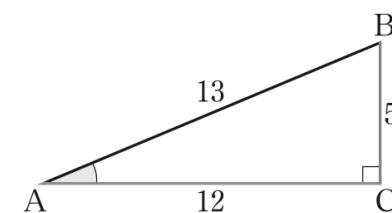


例 1 右の図の直角三角形において

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}$$

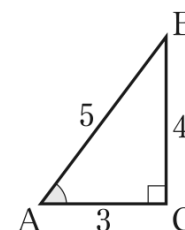
$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}$$



問1 次の図において, $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ の値を求めよ。

(1)

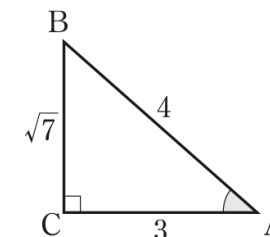


$$\sin A = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{3}{5}$$

$$\tan A = \frac{4}{3}$$

(2)



$$\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos A = \frac{3}{4}$$

$$\tan A = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

例 2 右の図の直角三角形において、斜辺 AB の長さを c とすると、三平方の定理により

$$c^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

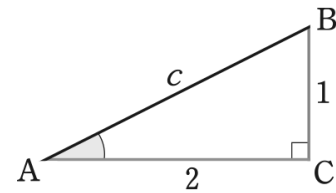
$$c > 0 \text{ より } c = \sqrt{5}$$

ゆえに

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

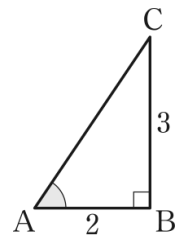
$$\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan A = \frac{1}{2}$$



問 2 次の図において、 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ の値を求めよ。

(1)



$AC = b$ とすると

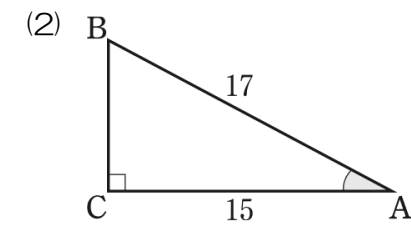
$$b^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

$$b > 0 \text{ より } b = \sqrt{13}$$

$$\text{ゆえに } \sin A = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\cos A = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\tan A = \frac{3}{2}$$



$BC = a$ とすると

$$a^2 + 15^2 = 17^2$$

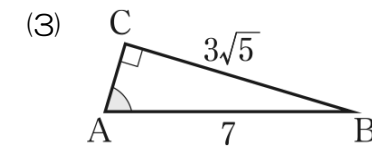
$$a^2 = 64$$

$$a > 0 \text{ より } a = 8$$

$$\text{ゆえに } \sin A = \frac{8}{17}$$

$$\cos A = \frac{15}{17}$$

$$\tan A = \frac{8}{15}$$



$AC = b$ とすると

$$(3\sqrt{5})^2 + b^2 = 7^2$$

$$b^2 = 4$$

$$b > 0 \text{ より } b = 2$$

$$\text{ゆえに } \sin A = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

$$\cos A = \frac{2}{7}$$

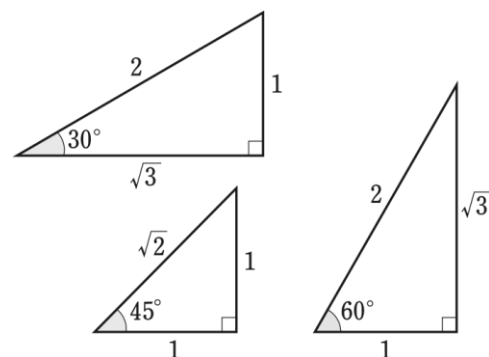
$$\tan A = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

30°, 45°, 60° の三角比

(教科書 p.120)

30°, 45°, 60° の三角比の値は、下の図を用いて求めることができる。
これらの角の三角比の値を表にすると、下のようになる。

A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



三角比の表

(教科書 p.121)

207 ページの三角比の表に、0° から 90° まで 1° ごとに角に対する正弦、余弦、正接の値を小数第 4 位まで示した。

右の表はその三角比の表の一部である。

例 3 上の表から $\cos 48^\circ = (\text{0.6691})$

また, $\sin A = 0.7986$ を満たす A は $A = (\text{53}^\circ)$

角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281

問3 三角比の表から、次の値を求めよ。

(1) $\sin 15^\circ = \text{0.2588}$

(2) $\cos 67^\circ = \text{0.3907}$

(3) $\tan 38^\circ = \text{0.7813}$

問4 三角比の表から、次の式を満たす A を求めよ。

(1) $\sin A = 0.9659$

$A = 75^\circ$

(2) $\cos A = 0.9205$

$A = 23^\circ$

(3) $\tan A = 2.3559$

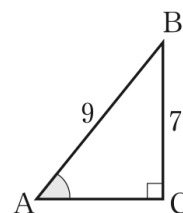
$A = 67^\circ$

例 4 右の図の直角三角形において、 A を求めてみよう。

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{9} \approx 0.7778$$

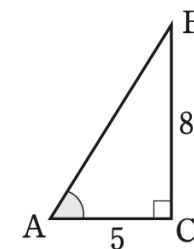
正弦が 0.7778 に最も近い A を三角比の表から求めると

$A \approx 51^\circ$



問5 三角比の表から、次の A を求めよ。

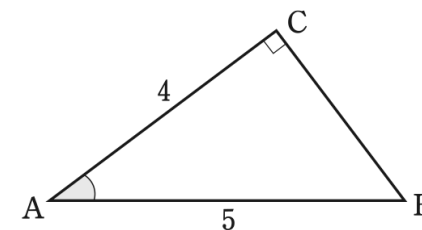
(1)



$$\tan A = \frac{8}{5} = 1.6$$

三角比の表より $A \approx 58^\circ$

(2)



$$\cos A = \frac{4}{5} = 0.8$$

三角比の表より $A \approx 37^\circ$

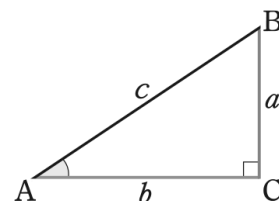
三角比の応用

(教科書 p.122)

三角比を利用して、いろいろな値を求めてみよう。

右の図の直角三角形 ABC において

$$\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c}, \tan A = \frac{a}{b}$$



であるから、次の式が成り立つ。

$$a = (^{13} \quad c \sin A), b = (^{14} \quad c \cos A), a = (^{15} \quad b \tan A)$$

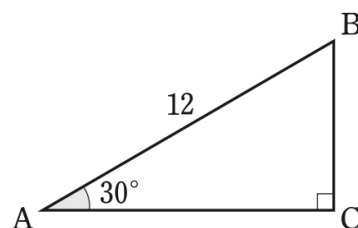
例 5 右の図の直角三角形において

$$BC = AB \sin A$$

$$= 12 \sin 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

$$AC = AB \cos A$$

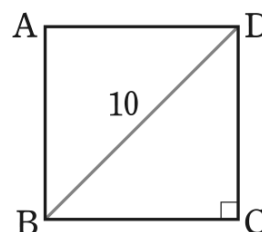
$$= 12 \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$



問6 正方形 ABCD において、BD = 10 のとき、BC の長さを求めよ。

$\angle DBC = 45^\circ$ より

$$BC = BD \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

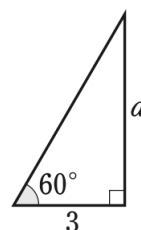


例 6 右の図の直角三角形において、 a の値を求めてみよう。

$$a = 3 \tan 60^\circ$$

$$= 3 \cdot \sqrt{3}$$

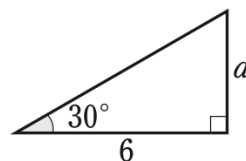
$$= 3\sqrt{3}$$



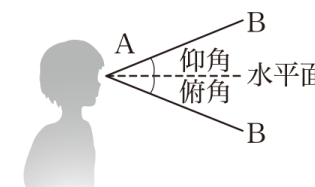
問7 右の図の直角三角形において、 a の値を求めよ。

$$a = 6 \tan 30^\circ$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$



右の図のように、点 A から点 B を見るとき、AB と A を通る水平面とのなす角を、B が水平面より上にあるならば (¹⁶ 仰角) といい、下にあるならば (¹⁷ 俯角) という。



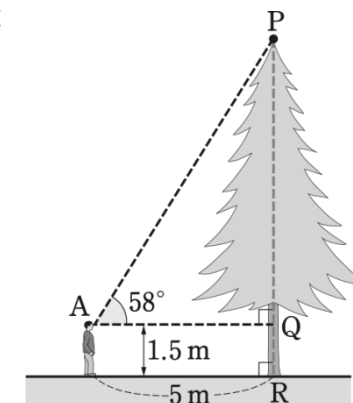
例題 1 平地に立っている木の根元から 5m 離れた地点に立って、木の上端を望むときの仰角、すなわち、右の図の $\angle QAP$ は 58° であった。

目の高さを 1.5m とするとき、木の高さは何 m か。

ただし、 $\tan 58^\circ = 1.6$ とする。

解 上の図において、木の高さ PR は

$$\begin{aligned} PR &= PQ + QR = 5 \tan 58^\circ + 1.5 \\ &= 5 \cdot 1.6 + 1.5 \\ &= 9.5 \text{ (m)} \end{aligned}$$



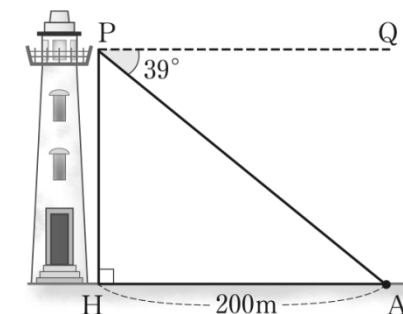
問8 展望台 P から地上の A 地点を見下ろすときの俯角、すなわち、右の図の $\angle QPA$ は 39° であった。

展望台から A 地点までの水平距離 AH が 200m であるとすると、展望台の高さ PH は何 m か。

ただし、 $\tan 39^\circ = 0.81$ とする。

$\angle PAH = 39^\circ$ であるから

$$\begin{aligned} PH &= AH \cdot \tan 39^\circ \\ &= 200 \cdot 0.81 \\ &= 162 \text{ (m)} \end{aligned}$$

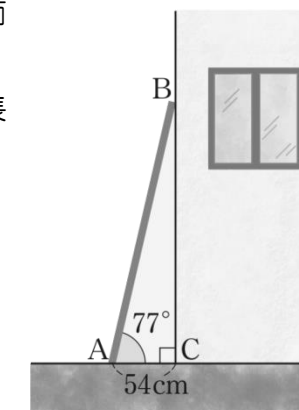


問9 右の図のように、家の壁にはしご AB を立て掛けて、はしごと地面とのなす角 $\angle BAC$ が 77° になるようにした。

はしごの下端 A と壁との距離 AC が 54cm であるとき、はしごの長さ AB を三角比の表を用いて求めよ。

$AC = AB \cos 77^\circ$ であるから

$$AB = \frac{AC}{\cos 77^\circ} = \frac{54}{0.2250} = 240 \text{ (cm)}$$



2 三角比の相互関係

右の図の直角三角形において

$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A$$

である。

よって

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{c \sin A}{c \cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

また、三平方の定理により、 $a^2 + b^2 = c^2$ であるから

$$(c \sin A)^2 + (c \cos A)^2 = c^2$$

両辺を c^2 で割ると $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

ふつう、 $(\sin A)^2$ 、 $(\cos A)^2$ をそれぞれ $\sin^2 A$ 、 $\cos^2 A$ と書く。

以上より、次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係(1)

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

例題 A が鋭角で、 $\cos A = \frac{5}{7}$ であるとき、 $\sin A$ 、 $\tan A$ の値を求めよ。

2

解 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ であるから

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}$$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \quad \dots\dots \boxed{\text{答}}$$

$$\text{また} \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \div \frac{5}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \dots\dots \boxed{\text{答}}$$

問 10 A が鋭角で、 $\sin A = \frac{1}{3}$ であるとき、 $\cos A$ 、 $\tan A$ の値を求めよ。

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ であるから

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$\cos A > 0$ であるから

$$\cos A = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{3} \div \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

等式 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ の両辺を $\cos^2 A$ で割ると

$$\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}$$

ここで、 $\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$ であるから、次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係(2)

$$1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$$

例題 A が鋭角で、 $\tan A = 3$ であるとき、 $\cos A$ 、 $\sin A$ の値を求めよ。

3

解 $1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$ であるから

$$\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + 3^2 = 10$$

よって

$$\cos^2 A = \frac{1}{10}$$

$\cos A > 0$ であるから

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \quad \dots\dots \boxed{\text{答}}$$

また、 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ であるから

$$\sin A = \tan A \cos A$$

$$= 3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \quad \dots\dots \boxed{\text{答}}$$

問 11 A が鋭角で、 $\tan A = \frac{1}{2}$ であるとき、 $\cos A$ 、 $\sin A$ の値を求めよ。

$$1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} \text{ であるから}$$

$$\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\text{よって } \cos^2 A = \frac{4}{5}$$

$\cos A > 0$ であるから

$$\cos A = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

また、 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ であるから

$$\sin A = \tan A \cos A$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

90° - A の三角比

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

が成り立つ。

また、三角比の表をくわしく見ると、0° から 90° までの正弦の数値の配列を逆に並べたものは、0° から 90° までの余弦の数値の配列に一致している。

一般に、 A と $90^\circ - A$ の三角比の間にどのような関係があるかを調べてみよう。

右の図の直角三角形において

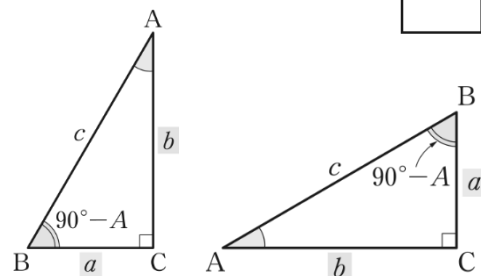
$$\sin B = \frac{b}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\cos B = \frac{a}{c}, \quad \sin A = \frac{a}{c}$$

$$\tan B = \frac{b}{a}, \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

ここで $B = 90^\circ - A$

であるから、次の公式が成り立つ。



(教科書p.126)

角	正弦(sin)	余弦(cos)
0°	0.0000	1.0000
1°	0.0175	0.9998
2°	0.0349	0.9994
3°	0.0523	0.9986
4°	0.0698	0.9976
5°	0.0872	0.9962
85°	0.9962	0.0872
86°	0.9976	0.0698
87°	0.9986	0.0523
88°	0.9994	0.0349
89°	0.9998	0.0175
90°	1.0000	0.0000

90° - A の三角比

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - A) &= \cos A \\ \cos(90^\circ - A) &= \sin A \\ \tan(90^\circ - A) &= \frac{1}{\tan A} \end{aligned}$$

この公式を用いると、鋭角の三角比を 45° 以下の角の三角比で表すことができる。

例 7 $\sin 63^\circ = \sin(90^\circ - 27^\circ) = \cos 27^\circ$

$$\cos 63^\circ = \cos(90^\circ - 27^\circ) = \sin 27^\circ$$

$$\tan 63^\circ = \tan(90^\circ - 27^\circ) = \frac{1}{\tan 27^\circ}$$

問 12 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

(1) $\sin 56^\circ = \sin(90^\circ - 34^\circ) = \cos 34^\circ$

(2) $\cos 87^\circ = \cos(90^\circ - 3^\circ) = \sin 3^\circ$

(3) $\tan 72^\circ = \tan(90^\circ - 18^\circ) = \frac{1}{\tan 18^\circ}$

問題

- 1 地面に垂直に建つ塔がある。塔から離れた地点 A において塔の先端 B の仰角を測ると 45° であり, そこから塔に 268m 近づいた地点 D での仰角は 60° である。

このとき, 塔の高さは約何 m か。

$\angle ABC = 45^\circ$, $\angle DBC = 30^\circ$ であるから, $BC = x(\text{m})$ とすると

$$AC = x \tan 45^\circ = x \cdot 1 = x$$

$$DC = x \tan 30^\circ = x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

ここで, $AC - DC = AD$ であるから

$$x - \frac{1}{\sqrt{3}}x = 268$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}x = 268$$

$$x = \frac{268\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

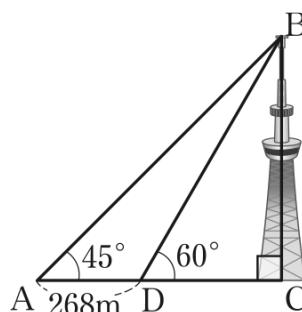
$$= \frac{268\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= 134(3 + \sqrt{3})$$

$$= 634.09 \dots$$

ゆえに, 塔の高さは 約 634m

(教科書 p.127)



- 2 右の図の直角三角形 ABC において

$$AB = c$$

とおくとき, 次の線分の長さを c と A の三角比を用いて表せ。

- (1) BC

直角三角形 ABC に着目して

$$BC = AB \sin A = c \sin A$$

- (2) CD

$\triangle ABC \sim \triangle CBD$ であるから

$$\angle BCD = \angle BAC = A$$

直角三角形 CBD に着目して

$$CD = BC \cos \angle BCD$$

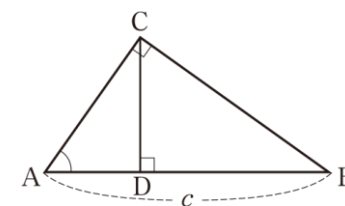
$$= c \sin A \cos A$$

- (3) DB

$$DB = BC \sin \angle BCD$$

$$= c \sin A \sin A$$

$$= c \sin^2 A$$



- 3 A が鋭角で, $\cos A = \frac{5}{13}$ であるとき, 次の値を求めよ。

- (1) $\sin A$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$$

$$= 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

- (2) $\tan A$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{12}{13} \div \frac{5}{13} = \frac{12}{5}$$

- (3) $\sin(90^\circ - A)$

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A = \frac{5}{13}$$

- (4) $\cos(90^\circ - A)$

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A = \frac{12}{13}$$

4 $\triangle ABC$ の 3 つの角の大きさを A, B, C とする。このとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$

三角形の内角の和は 180° であるから

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$A + B = 180^\circ - C$$

両辺を 2 で割ると

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

よって

$$\sin \frac{A+B}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right)$$

$$= \cos \frac{C}{2}$$

(2) $\tan \frac{A+B}{2} \tan \frac{C}{2} = 1$

(1) と同様にして

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

よって

$$\tan \frac{A+B}{2} \tan \frac{C}{2} = \tan \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) \tan \frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} \cdot \tan \frac{C}{2}$$

$$= 1$$