1 節 点と直線

1 2 点間の距離

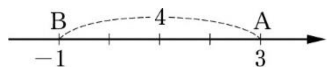
数直線上の 2 点間の距離

（教科書 p.62）

数直線上の点には実数が対応し，2 点 A(a)，B(b) 間の距離 AB は，a，b の大小に関係なく，絶対値の記号を用いて（① $AB=|b-a|$ ）と表される。

例 1 2 点 A(3)，B(−1) に対し

$AB=|-1-3|=4$



問1 次の 2 点間の距離を求めよ。

(1) O(0)，A(3)

$OA=|3-0|=|3|=\mathbf{3}$

(2) A(−1)，B(5)

$AB=|5-(-1)|=|6|=\mathbf{6}$

(3) A(7)，B(3)

$AB=|3-7|=|-4|=\mathbf{4}$

座標平面上の 2 点間の距離

（教科書 p.62）

2 点間の距離

2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離は

$$\mathbf{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

とくに，原点 O と点 P$(x,\ y)$ の距離は　$\mathbf{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$

例 2 2 点 A(−2，4)，B(2，3) 間の距離は

$$AB=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+(3-4)^2}=\sqrt{17}$$

原点 O と点 P(5，12) の距離は

$$OP=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$$

問2 次の 2 点間の距離を求めよ。

(1) A(2，1)，B(5，7)

$AB=\sqrt{(5-2)^2+(7-1)^2}$

$=\sqrt{45}=\mathbf{3\sqrt{5}}$

(2) A(−3，5)，B(−2，−2)

$AB=\sqrt{\{-2-(-3)\}^2+(-2-5)^2}$

$=\sqrt{50}=\mathbf{5\sqrt{2}}$

(3) O(0，0)，P(−4，3)

$OP=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=\mathbf{5}$

(4) A(8，−2)，B(8，−19)

$AB=\sqrt{(8-8)^2+\{-19-(-2)\}^2}$

$=\sqrt{17^2}=\mathbf{17}$

例 3 3 点 A(2，3)，B(1，1)，C(5，−1) を頂点とする△ ABC は，どのような形の三角形かを調べてみよう。この三角形の 3 辺の長さは

$AB=\sqrt{(1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$

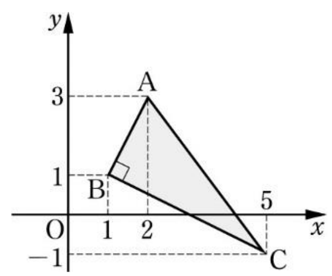
$BC=\sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{20}$

$=2\sqrt{5}$

$CA=\sqrt{(2-5)^2+(3+1)^2}=\sqrt{25}=5$

であるから　$AB^2+BC^2=CA^2$

よって，△ ABC は（ ∠B を直角とする直角三角形 ）である。



問3 次の 3 点を頂点とする三角形はどのような形の三角形か。

(1) $A(-1,\ 1),\ B(2,\ 2),\ C(3,\ -1)$

$AB=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$

$BC=\sqrt{(3-2)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{10}$

$CA=\sqrt{(-1-3)^2+\{1-(-1)\}^2}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

よって，$AB=BC$，$AB^2+BC^2=CA^2$ が成り立つ。

ゆえに，△ABC は **∠B を直角とし，AB = BCの直角二等辺三角形**である。

(2) $A(2,\ \sqrt{3}),\ B(-1,\ 2\sqrt{3}),\ C(-1,\ 0)$

$AB=\sqrt{(-1-2)^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$BC=\sqrt{\{-1-(-1)\}^2+(0-2\sqrt{3})^2}$

$=2\sqrt{3}$

$CA=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(\sqrt{3}-0)^2}$

$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

ゆえに，**△** ABC は**正三角形**である。

例4 2 点 $A(-1,\ 2)$，$B(4,\ 3)$ から等距離にある x 軸上の点 P の座標を求めてみよう。点 P の座標を $(x,\ 0)$ とする。

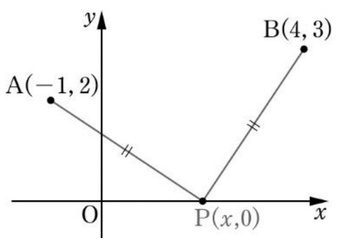
$AP=BP$ より　$AP^2=BP^2$

よって

$(x+1)^2+(-2)^2=(x-4)^2+(-3)^2$

これを解くと　$x=2$

すなわち　P(2, 0)



問4 2 点 $A(1,\ 1)$，$B(4,\ 4)$ から等距離にある y 軸上の点 Q の座標を求めよ。

点 Q の座標を $(0,\ y)$ とすると

$AQ=BQ$ より　$AQ^2=BQ^2$

よって　$(-1)^2+(y-1)^2=(-4)^2+(y-4)^2$

これを解いて　$y=5$

ゆえに　**Q(0, 5)**

2 内分点・外分点

数直線上の内分点・外分点

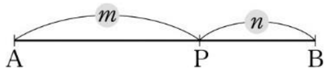
（教科書 p.64）

m，n を正の数とする。

線分 AB 上に点 P があり

AP : PB ＝ m : n

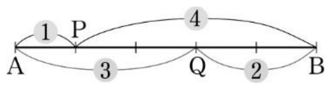
が成り立つとき，点 P は線分 AB を m : n に（② 内分 ）するという。



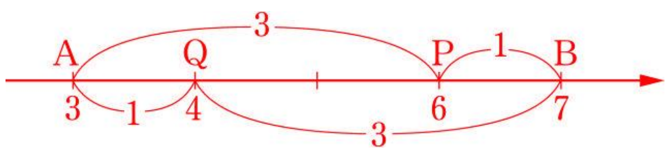
例 5 右の図において

点 P は線分 AB を（ 1 : 4 ）に内分し，

点 Q は線分 AB を（ 3 : 2 ）に内分する。



問5 2 点 A(3)，B(7) に対して，線分 AB を 3 : 1 に内分する点 P，1 : 3 に内分する点 Q をそれぞれ数直線上に図示せよ。



2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を m : n に内分する点 P の座標 x を求めてみよう。$a<b$ のとき，$a<x<b$ となるから

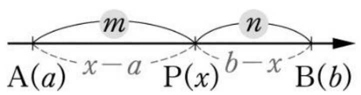
$\mathrm{AP}=x-a$，　$\mathrm{PB}=b-x$

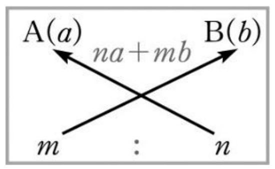
である。AP : PB ＝ m : n であるから

$(x-a):(b-x)=m:n$

すなわち　$m(b-x)=n(x-a)$

ゆえに　（③ $x=\dfrac{na+mb}{m+n}$ ）





$a>b$ のときも同様にして同じ式が導かれる。

とくに，線分 AB の（④ 中点 ）の座標は（⑤ $\dfrac{a+b}{2}$ ）である。

問6 2 点 A(−4)，B(6) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB の中点 M

$\dfrac{-4+6}{2}=1$ であるから　　**M(1)**

(2)　線分 AB を 3 : 2 に内分する点 P

$\dfrac{2\cdot(-4)+3\cdot 6}{3+2}=2$ であるから　　**P(2)**

(3)　線分 AB を 1 : 4 に内分する点 Q

$\dfrac{4\cdot(-4)+1\cdot 6}{1+4}=-2$ であるから　　**Q(−2)**

(4)　線分 BA を 1 : 4 に内分する点 R

$\dfrac{4\cdot 6+1\cdot(-4)}{1+4}=4$ であるから　　**R(4)**

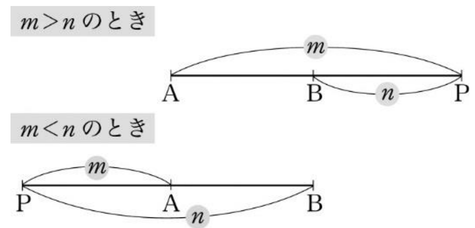
m，n を異なる正の数とする。

線分 AB の延長上に点 P があり

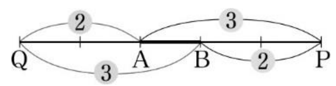
AP : PB ＝ m : n

が成り立つとき，点 P は線分 AB を m : n に

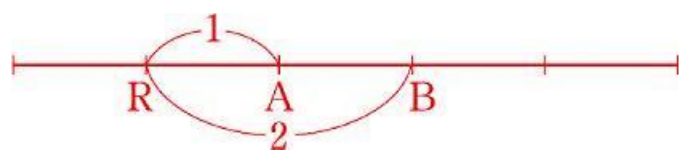
（⑥ 外分 ）するという。



例 6 右の図の点 P は線分 AB を（ 3 : 2 ）に外分し，点 Q は（ 2 : 3 ）に外分する。



問7 例 6 の線分 AB を 1 : 2 に外分する点 R を図示せよ。

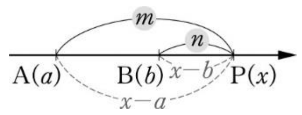


2 点 A(a), B(b) に対して，線分 AB を $m:n$ に外分する点 P の座標 x を求めてみよう。

$a<b$, $m>n$ とすると，点 P は線分 AB の右側にあるから

$$a<b<x$$

となる。

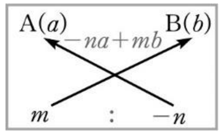


よって　$AP=x-a$,　$PB=x-b$

AP : PB $= m:n$ であるから

$$(x-a):(x-b)=m:n$$

すなわち　$m(x-b)=n(x-a)$



ゆえに　（⑦　$x=\frac{-na+mb}{m-n}$　）

この式は a と b, m と n の大小に関係なく成り立つ。

問8　2 点 A(−5), B(7) に対して，次の点の座標を求めよ。

(1)　線分 AB を 2 : 1 に外分する点 P

$$\frac{-1\cdot(-5)+2\cdot7}{2-1}=19$$

であるから　**P(19)**

(2)　線分 AB を 1 : 3 に外分する点 Q

$$\frac{-3\cdot(-5)+1\cdot7}{1-3}=-11$$

であるから　**Q(−11)**

座標平面上の内分点・外分点

（教科書 p.66）

外分点の座標も，内分点の場合と同様に求めることができる。

内分点・外分点の座標
2 点 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) を結ぶ線分 AB を $m:n$ に**内分**する点の座標は $\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$ $m:n$ に**外分**する点の座標は $\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$ とくに，線分 AB の**中点**の座標は $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

例 7　2 点 A(−2, 1), B(4, 4) がある。

線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P の座標を求めてみよう。

P(x, y) とすると

$$x=\frac{1\cdot(-2)+2\cdot4}{2+1}=2,\qquad y=\frac{1\cdot1+2\cdot4}{2+1}=3$$

したがって，求める点 P の座標は（　(2, 3)　）である。

線分 AB を 2 : 1 に外分する点 Q の座標を求めてみよう。

Q(x', y') とすると

$$x'=\frac{-1\cdot(-2)+2\cdot4}{2-1}=10,\qquad y'=\frac{-1\cdot1+2\cdot4}{2-1}=7$$

したがって，求める点 Q の座標は（　(10, 7)　）である。

問9 次の2点A，Bを結ぶ線分ABを，3：2に内分する点P，3：2に外分する点Q，および線分ABの中点Mの座標を求めよ。

(1) A(1, 3)，B(6, 5)

$$\frac{2\cdot1+3\cdot6}{3+2}=4,\quad \frac{2\cdot3+3\cdot5}{3+2}=\frac{21}{5}$$

であるから　$\mathbf{P\left(4,\ \frac{21}{5}\right)}$

$$\frac{-2\cdot1+3\cdot6}{3-2}=16,$$

$$\frac{-2\cdot3+3\cdot5}{3-2}=9$$

であるから　$\mathbf{Q(16,\ 9)}$

$$\frac{1+6}{2}=\frac{7}{2},\quad \frac{3+5}{2}=4$$

であるから　$\mathbf{M\left(\frac{7}{2},\ 4\right)}$

(2) A(−2, 3)，B(4, −1)

$$\frac{2\cdot(-2)+3\cdot4}{3+2}=\frac{8}{5},$$

$$\frac{2\cdot3+3\cdot(-1)}{3+2}=\frac{3}{5}$$

であるから　$\mathbf{P\left(\frac{8}{5},\ \frac{3}{5}\right)}$

$$\frac{-2\cdot(-2)+3\cdot4}{3-2}=16,$$

$$\frac{-2\cdot3+3\cdot(-1)}{3-2}=-9$$

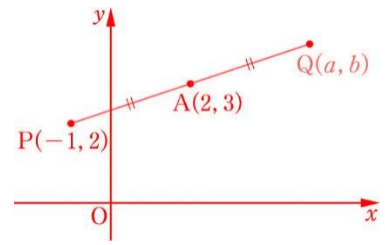
であるから　$\mathbf{Q(16,\ -9)}$

$$\frac{-2+4}{2}=1,\quad \frac{3+(-1)}{2}=1$$

であるから　$\mathbf{M(1,\ 1)}$

例題1 点A(2, 3)に関して，点P(−1, 2)と対称な点Qの座標を求めよ。

解 点Qの座標を$(a,\ b)$とすると，線分PQの中点が点Aであるから



$$\frac{-1+a}{2}=2,\quad \frac{2+b}{2}=3$$

したがって　$a=5,\ b=4$

求める点Qの座標は　(5, 4)

問10 4点A(−1, −1)，B(5, −2)，C(3, 3)，Dを頂点とする平行四辺形ABCDについて，次の点の座標を求めよ。

(1) 対角線ACの中点M

$$\frac{-1+3}{2}=1,\quad \frac{-1+3}{2}=1$$

であるから　$\mathbf{M(1,\ 1)}$

(2) 頂点D

対角線BDの中点がM(1, 1)であるから，D$(a,\ b)$とすると

$$\frac{5+a}{2}=1,\quad \frac{-2+b}{2}=1$$

よって　$a=-3,\ b=4$

ゆえに　$\mathbf{D(-3,\ 4)}$

三角形の重心

（教科書 p.68）

三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ線分を（⑧ 中線 ）という。三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，この点をその三角形の（⑨ 重心 ）という。重心はそれぞれの中線を 2：1 に内分する点である。

三角形の重心
3 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ を頂点とする△ ABC の重心 G の座標は $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

例 8 3 点 A(2, 3), B(5, −4), C(−1, 1)を頂点とする△ ABC の重心 G の座標 (x, y) は

$$x=\frac{2+5+(-1)}{3}=2, \qquad y=\frac{3+(-4)+1}{3}=0$$

すなわち　G(2, 0)

問 11 3 点 A(3, 6), B(−5, −1), C(8, −7)を頂点とする△ ABC の重心 G の座標を求めよ。

$$\frac{3+(-5)+8}{3}=2,$$

$$\frac{6+(-1)+(-7)}{3}=-\frac{2}{3}$$

であるから　$\mathbf{G}\left(2, -\frac{2}{3}\right)$