2 節 三角比の拡張

1 三角比と座標 （教科書 p.128）

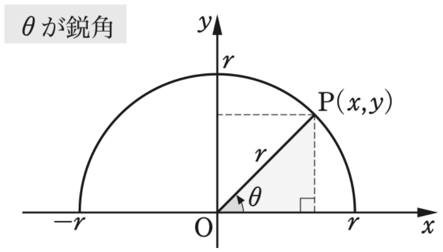
x 軸の正の部分を原点のまわりに θ だけ回転して得られる半直線を考え，この半直線と原点を中心とする半径 r の円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

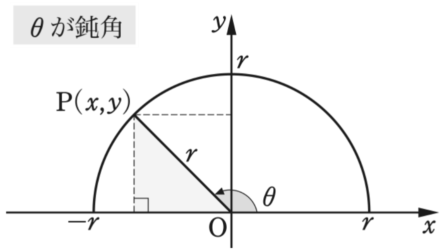
ただし，回転の向きは時計の針の回転と逆の向きとする。

このとき，角 θ に対する三角比を次のように定める。

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

三角比の値は，角 θ だけで定まり，半径 r の大きさによらない。





θ が鈍角のときは $x<0,\ y>0$ であるから

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta<0$

となる。

これらをまとめると，三角比の符号は，右の表のようになる。

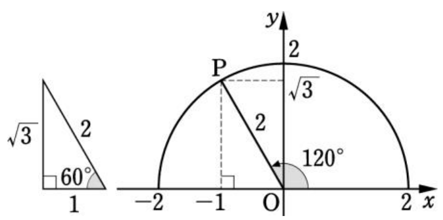
θ	鋭角	鈍角
$\sin\theta$	＋	＋
$\cos\theta$	＋	−
$\tan\theta$	＋	−

例 1 半径 2 の円において，$\theta=120°$ とすると点 P の座標は下の図より $\left(-1,\ \sqrt{3}\right)$ であるから，$120°$ の三角比の値は次のようになる。

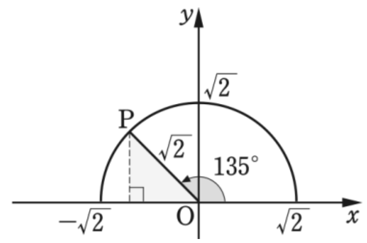
$\sin 120°=$

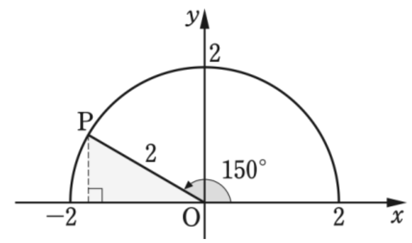
$\cos 120°=$

$\tan 120°=$



問1 次の図を用いて，$135°$，$150°$ の三角比の値を求めよ。





単位円の周上の点の座標 （教科書 p.130）

原点を中心とする半径 1 の円を（[1]　　　　　　　）という。単位円で考えると，角 θ を表す半径を OP，点 P の座標を $(x,\ y)$ とするとき，三角比の定義から

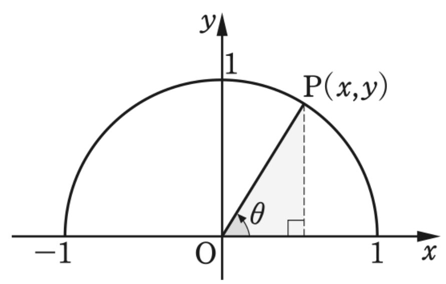
$$\sin\theta=y,\quad \cos\theta=x,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

である。

したがって，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき

$$-1\leqq\cos\theta\leqq1,\quad 0\leqq\sin\theta\leqq1$$

が成り立つ。



0°，90°，180°の三角比

（教科書 p.130）

単位円において，半径 OP が表す角が 0°，90°，180° のとき，点 P の座標はそれぞれ

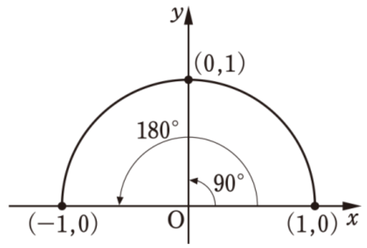
$(1,\ 0)$，　$(0,\ 1)$，　$(-1,\ 0)$

となる。よって，0°，90°，180° の三角比の値は，次のようになる。

$\sin 0° = 0$，　$\cos 0° = 1$，　$\tan 0° = 0$

$\sin 90° = 1$，　$\cos 90° = 0$，　$\tan 90°$ は定義されない

$\sin 180° = 0$，　$\cos 180° = -1$，　$\tan 180° = 0$



いろいろな角の三角比の値を表にまとめると，次のようになる。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

正弦・余弦の値から角を求めること

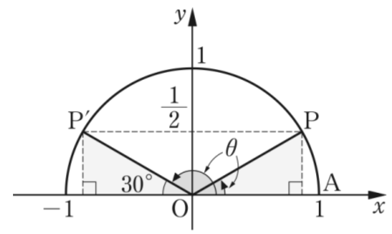
（教科書 p.131）

例題 1　次の等式を満たす角 θ を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1)　$\sin\theta = \frac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

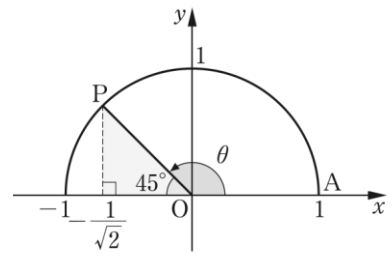
解　(1)　単位円の周上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の 2 点 P，P′ である。

求める角 θ は ∠AOP，∠AOP′ であるから



(2)　単位円の周上で，x 座標が $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は，右の図の点 P である。

求める角 θ は ∠AOP であるから



問2　次の等式を満たす角 θ を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1)　$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\cos\theta = -1$

問3　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$2\cos\theta - 1 = 0$ を満たす角 θ を求めよ。

正接の値がとり得る範囲

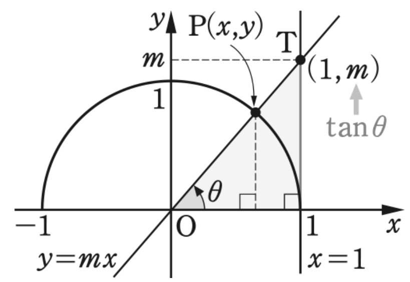
（教科書 p.132）

正接の値がとり得る範囲について，単位円と直線 $x = 1$ を利用して考えてみよう。

実数 m が与えられたとき，直線 $x = 1$ 上に点 $\mathrm{T}(1,\ m)$ をとる。

直線 OT と単位円の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，半径 OP が表す角を θ とすると

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{m}{1} = m$



したがって，$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$，　$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ のとき，

（1　　　　　　　　　　　　　　　　）をとる。

例題 2　次の等式を満たす角 θ を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

$\tan\theta = -\sqrt{3}$

解　直線 $x = 1$ 上に

点 $\mathrm{T}(1,\ -\sqrt{3})$

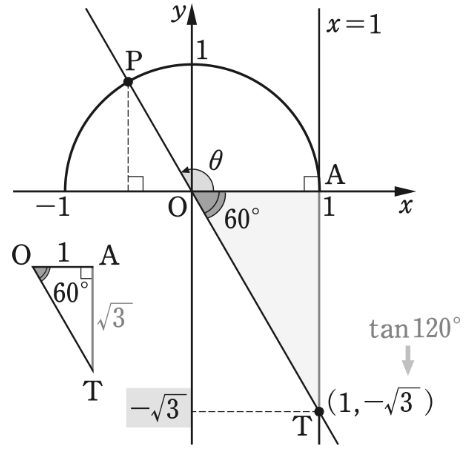
をとる。

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから，直線 OT と単位円の交点 P を右の図のようにとると

$\theta = \angle\mathrm{AOP}$

である。

$\angle\mathrm{TOA} = 60^\circ$ であるから



問4　次の等式を満たす角 θ を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1)　$\tan\theta = \sqrt{3}$

(2)　$\tan\theta = -1$

直線の傾きと正弦

（教科書 p.133）

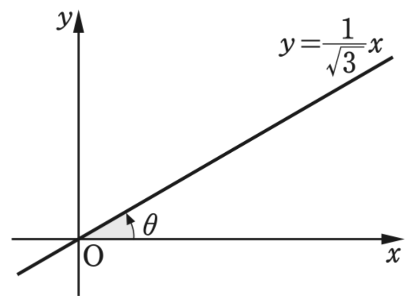
例2　$\tan 45° = 1$ であるから，x 軸の正の向きとなす角が $45°$ である直線の傾きは（　　　　）である。

問5　x 軸の正の向きとなす角が $135°$ である直線の傾きを求めよ。

例3　直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ が x 軸の正の向きとなす角 θ を求めてみよう。

$\tan\theta =$

であるから



問6　次の直線が x 軸の正の向きとなす角を求めよ。

(1)　$y = -\sqrt{3}x$

(2)　$y = x + 2$

2 三角比の性質

三角比の相互関係

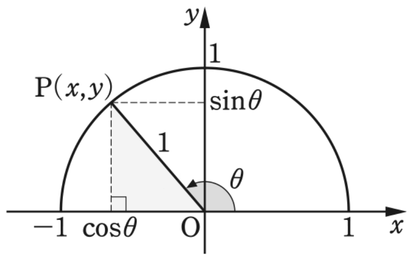
（教科書 p.134）

単位円で三角比を考えると

$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$

であるから

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$



また，三平方の定理により，$x^2+y^2=1$ であるから

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

すなわち，角 θ の範囲が $0°\leqq\theta\leqq 180°$ のときも次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係(1)
$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$,　　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

例題 3　$\sin\theta=\frac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

ただし，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ とする。

解　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=$

（ⅰ）　θ が鋭角のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$\cos\theta=$　　　，$\tan\theta=$

（ⅱ）　θ が鈍角のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$\cos\theta=$　　　，$\tan\theta=$

問7　$0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta=\frac{5}{13}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値

(2)　$\cos\theta=-\frac{1}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

等式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

ここで，$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$ であるから，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のときも次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係(2)
$\mathbf{1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

例題 4　$\tan\theta=-2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。
ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

解　$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=$

$\tan\theta<0$ より，θ は鈍角であるから $\cos\theta<0$

よって　　$\cos\theta=$

また　　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$

問8　$\tan\theta=-\frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

180° − θ の三角比

（教科書 p.136）

右の図のように，点 $P(x,\ y)$ と点 $P'(-x,\ y)$ は y 軸に関して対称であるから，$\angle AOP=\theta$ とおくと

$\angle AOP'=180^\circ-\theta$

である。

よって

$\sin(180^\circ-\theta)=y=\sin\theta$

$\cos(180^\circ-\theta)=-x=-\cos\theta$

$\tan(180^\circ-\theta)=\frac{y}{-x}=-\frac{y}{x}=-\tan\theta$

したがって，次の公式が成り立つ。

180° − θ の三角比
$\mathbf{\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta}$ $\mathbf{\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta}$ $\mathbf{\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta}$

この公式により，鈍角の三角比は鋭角の三角比になおして，その値を求めることができる。

例 4　三角比の表を用いて，次の値を求めてみよう。

$\sin 154^\circ=\sin(180^\circ-26^\circ)=$

$\cos 154^\circ=\cos(180^\circ-26^\circ)=$

$\tan 154^\circ=\tan(180^\circ-26^\circ)=$

問9　三角比の表を用いて，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 140^\circ$

(2)　$\cos 118^\circ$

(3)　$\tan 163^\circ$

問 題

（教科書 p.137）

5 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，$2\cos^2\theta - 1 = 0$ を満たす角 θ を求めよ。

6 $\sin 36° = 0.588$，$\cos 36° = 0.809$，$\tan 36° = 0.727$ を用いて，次の三角比の値を求めよ。

(1) $\sin 144°$

(2) $\cos 144°$

(3) $\tan 144°$

(4) $\sin 126°$

(5) $\cos 126°$

7 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin\theta = \frac{3}{4}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値

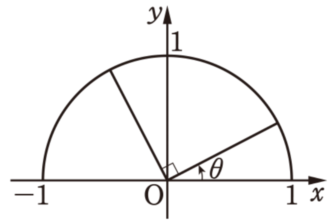
(2)　$\tan\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値

8　等式

$$1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

が成り立つことを証明せよ。

9　$0° \leqq \theta \leqq 90°$ とするとき，次の三角比を θ の三角比を用いて表せ。



(1)　$\sin(90° + \theta)$

(2)　$\cos(90° + \theta)$

10　2 直線

$$y = \sqrt{3}x$$
$$y = -x$$

のなす角 θ を求めよ。

ただし，$0° \leqq \theta \leqq 90°$ とする。