

3 直線の方程式

1 次関数 $y = mx + n$ のグラフは、傾きが m の直線である。この直線と y 軸との交点の y 座標 n を、この直線の (10) という。

一般に、 x, y についての方程式を成り立たせる点 (x, y) のえがく図形を、その (11) または (12) という。また、その方程式を、その (13) という。

例 9 (1) 方程式 $3x - 2y + 4 = 0$ は

$$y = \frac{3}{2}x + 2$$

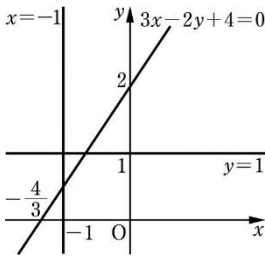
と変形できるから、傾きが (), y 切片が () の直線を表す。

(2) 方程式 $y - 1 = 0$ は $y = 1$

と変形できるから、点 () を通り、() に平行な直線を表す。

(3) 方程式 $x + 1 = 0$ は $x = -1$

と変形できるから、点 () を通り、() に平行な直線を表す。



直線の方程式のいろいろな形

(教科書 p.70)

1 点を通り、傾き m の直線

点 (x_1, y_1) を通り、傾き m の直線の方程式は

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

例 10 点 $(2, -5)$ を通り、傾き -4 の直線の方程式は

$$y - (-5) = -4(x - 2)$$

すなわち

問 12 次の方程式の表す図形を座標平面上にかけ。

(1) $2x - 3y + 6 = 0$

(2) $y - 2 = 0$

(3) $x + 3 = 0$

問 13 点 $(-3, 4)$ を通り、次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1) 傾きが 2

(2) 傾きが $-\frac{1}{3}$

2点を通る直線

2点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は

$$x_1 \neq x_2 \text{ のとき } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$x_1 = x_2 \text{ のとき } x = x_1$$

例 11 2点 $A(-3, 2), B(6, 8)$ を通る直線の方程式は

$$y - 2 = \frac{8-2}{6-(-3)} \{x - (-3)\} \quad \text{すなわち}$$

問 14 次の2点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

(1) $A(2, -3), B(4, 3)$

(2) $A(6, -1), B(-3, 5)$

(3) $A(-2, 0), B(-2, -6)$

(4) $A(4, 7), B(-3, 7)$

問 15 3点 $A(-2, 6), B(7, 3), C(a, a+4)$ があるとき、次の問に答えよ。

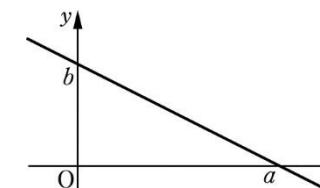
(1) 2点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

(2) 3点 A, B, C が一直線上にあるように、定数 a の値を定めよ。

例 12 2点 $(a, 0), (0, b)$ を通る直線の方程式は、 $a \neq 0, b \neq 0$ のとき

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a} (x - a)$$

である。これを变形すると



注意 直線と x 軸との交点の x 座標をその直線の⁽¹⁴⁾)という。例 12 の直線では x 切片が a , y 切片が b である。

問 16 x 切片が 3, y 切片が -2 である直線の方程式を求めよ。

4 2 直線の関係

2 直線の平行と垂直

(教科書 p.72)

2 直線の平行条件・垂直条件

2 直線 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ について

平行条件は $m = m'$ 垂直条件は $mm' = -1$

問 17 次の直線のうち、互いに平行なもの、互いに垂直なものを選べ。

- ① $y = -2x + 5$
- ② $x - 3y + 7 = 0$
- ③ $6x + 2y + 3 = 0$
- ④ $6x + 3y = 1$

例題 2 点 $(-1, 2)$ を通り、直線 $3x + 2y - 9 = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また、垂直な直線の方程式を求めよ。

問 18 点 $(3, -1)$ を通り、直線 $2x - 5y - 1 = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また、垂直な直線の方程式を求めよ。

問 19 直線 $ax - 2y + 5 = 0$ が直線 $2x + y - 10 = 0$ に垂直であるとき、定数 a の値を求めよ。

例題

3

考え方

直線 $x + 2y - 10 = 0$ に関して、点 $A(1, 2)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

解

問 20

直線 $4x - 2y - 3 = 0$ に関して、点 $A(4, -1)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

2 直線の交点

(教科書 p.75)

例題

4

2 直線 $x + y - 4 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ について、次の問に答えよ。

- (1) 2 直線の交点の座標を求めよ。
- (2) この 2 直線と直線 $mx - y + 2m + 1 = 0$ が 1 点で交わるような定数 m の値を求めよ。

解

問 21 次の2直線の交点の座標を求めよ。

(1) $5x - 4y + 13 = 0, \quad 3x + y + 1 = 0$

(2) $3x - y - 6 = 0, \quad 6x + 5y + 2 = 0$

問 22 3直線

$x - 2y + 8 = 0, \quad 2x + 3y - 5 = 0, \quad mx - y - 2m + 8 = 0$

が1点で交わる時、定数 m の値を求めよ。

2直線の交点を通る直線

(教科書 p.76)

2直線 $x + y - 4 = 0, 2x - y + 1 = 0$ に対して、方程式

(¹⁵) $(k+2)x + (k-1)y + (-4k+1) = 0$ ①

を考える。ただし、 k は定数とする。

方程式①が2直線の交点を通る直線を表すことを示してみよう。

$x + y - 4 = 0, 2x - y + 1 = 0$

を同時に満たす x, y の値の組 $x = 1,$

$y = 3$ は k の値に関係なく①を満たす。

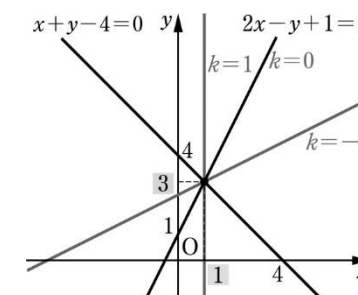
よって、①で表される図形は2直線の交点 $(1, 3)$ を通る。

また、①を変形すると

$(k+2)x + (k-1)y + (-4k+1) = 0$ ②

$k+2$ と $k-1$ は同時には0にならないから、②の表す図形は直線である。

よって、①は2直線 $x + y - 4 = 0, 2x - y + 1 = 0$ の交点 $(1, 3)$ を通る直線を表す。



例題

5

解

2直線 $3x + 4y - 17 = 0, x - 2y + 1 = 0$ の交点と点 $(2, 3)$ を通る直線の方程式を求めよ。

問 23 2直線 $4x - 5y + 5 = 0, x + 2y - 6 = 0$ の交点と点 $(1, 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

点と直線の距離

(教科書 p.77)

点と直線の距離

点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d は

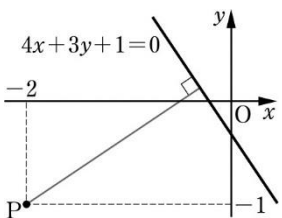
$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

例 13 点 $P(-2, -1)$ と直線

$$4x + 3y + 1 = 0$$

の距離 d は

$$d =$$



問 24 次の点と直線の距離を求めよ。

(1) 原点と直線 $x + 2y + 2 = 0$

(2) 点 $(3, 4)$ と直線 $2x - 3y + 1 = 0$

(3) 点 $(7, -1)$ と直線 $y = -3x + 6$

座標を用いた図形の性質の証明

(教科書 p.78)

応用
例題

6

証明

$\triangle ABC$ の辺 BC の中点を M とすると

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

であることを証明せよ。

問 25 $\triangle ABC$ の辺 BC を $1 : 2$ に内分する点を D とすると

$$2AB^2 + AC^2 = 3(AD^2 + 2BD^2)$$

であることを証明せよ。

応用
例題

7

証明

△ABC の3つの頂点から、それぞれの対辺に下ろした垂線 AL, BM, CN は1点で交わることを証明せよ。

例題7における3本の垂線の交点を△ABC の⁽¹⁶⁾ 〃 という。

問26 △ABC において、各辺の垂直二等分線は、1点で交わることを証明せよ。