3 直線の方程式（教科書 p.69）

1 次関数 $y=mx+n$ のグラフは，傾きが m の直線である。この直線と y 軸との交点の y 座標 n を，この直線の（⑩ y 切片 ）という。

一般に，x, y についての方程式を成り立たせる点 $(x,\ y)$ のえがく図形を，その（⑪ 方程式の表す図形 ）または（⑫ 方程式のグラフ ）という。また，その方程式を，その（⑬ 図形の方程式 ）という。

例 9 (1) 方程式 $3x-2y+4=0$ は

$$y=\frac{3}{2}x+2$$

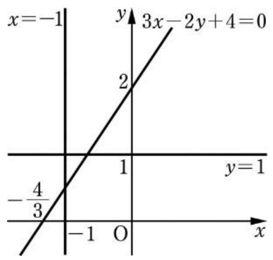
と変形できるから，傾きが（ $\frac{3}{2}$ ），y 切片が（ 2 ）の直線を表す。

(2) 方程式 $y-1=0$ は $y=1$

と変形できるから，点（ $(0,\ 1)$ ）を通り，（ x 軸 ）に平行な直線を表す。

(3) 方程式 $x+1=0$ は $x=-1$

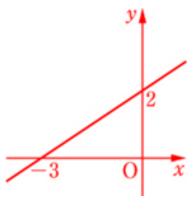
と変形できるから，点（ $(-1,\ 0)$ ）を通り，（ y 軸 ）に平行な直線を表す。



問 12 次の方程式の表す図形を座標平面上にかけ。

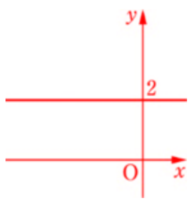
(1) $2x-3y+6=0$

方程式 $2x-3y+6=0$ は $y=\frac{2}{3}x+2$ と変形できるので，この方程式が表す図形は，傾き $\frac{2}{3}$，y 切片 2 の直線である。



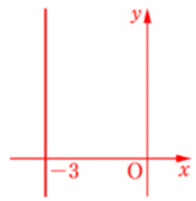
(2) $y-2=0$

方程式 $y-2=0$ は $y=2$ と変形できるので，この方程式が表す図形は，点 $(0,\ 2)$ を通り x 軸に平行な直線である。



(3) $x+3=0$

方程式 $x+3=0$ は $x=-3$ と変形できるので，この方程式が表す図形は，点 $(-3,\ 0)$ を通り y 軸に平行な直線である。



直線の方程式のいろいろな形

（教科書 p.70）

1 点を通り，傾き m の直線
点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾き m の直線の方程式は $\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)}$

例 10 点 $(2,\ -5)$ を通り，傾き -4 の直線の方程式は

$$y-(-5)=-4(x-2)$$

すなわち $y=-4x+3$

問 13 点 $(-3,\ 4)$ を通り，次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1) 傾きが 2

点 $(-3,\ 4)$ を通り，傾きが 2 の直線の方程式は

$$y-4=2\{x-(-3)\}$$

すなわち $\boldsymbol{y=2x+10}$

(2) 傾きが $-\frac{1}{3}$

点 $(-3,\ 4)$ を通り，傾きが $-\frac{1}{3}$ の直線の方程式は

$$y-4=-\frac{1}{3}\{x-(-3)\}$$

すなわち $\boldsymbol{y=-\frac{1}{3}x+3}$

２点を通る直線
2 点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は $\boldsymbol{x_1 \neq x_2}$ のとき　$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$ $\boldsymbol{x_1 = x_2}$ のとき　$\boldsymbol{x = x_1}$

例 11　2 点 A$(-3,\ 2)$, B$(6,\ 8)$ を通る直線の方程式は

$y - 2 = \frac{8-2}{6-(-3)}\{x - (-3)\}$　　すなわち　$y = \frac{2}{3}x + 4$

問 14　次の 2 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

(1)　A$(2,\ -3)$, B$(4,\ 3)$

2 点 A$(2,\ -3)$, B$(4,\ 3)$を通る直線の方程式は

$$y - (-3) = \frac{3-(-3)}{4-2}(x-2)$$

すなわち　$\boldsymbol{y = 3x - 9}$

(2)　A$(6,\ -1)$, B$(-3,\ 5)$

2 点 A$(6,\ -1)$, B$(-3,\ 5)$ を通る直線の方程式は

$$y - (-1) = \frac{5-(-1)}{-3-6}(x-6)$$

すなわち　$\boldsymbol{y = -\frac{2}{3}x + 3}$

(3)　A$(-2,\ 0)$, B$(-2,\ -6)$

2 点 A$(-2,\ 0)$, B$(-2,\ -6)$ を通る直線の方程式は　$\boldsymbol{x = -2}$

(4)　A$(4,\ 7)$, B$(-3,\ 7)$

2 点 A$(4,\ 7)$, B$(-3,\ 7)$ を通る直線の方程式は　$\boldsymbol{y = 7}$

(参考)　異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式を

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

とすると，$x_1 \neq x_2$ のとき，$x_1 = x_2$ のときと場合分けする必要がない。

問 15　3 点 A$(-2,\ 6)$, B$(7,\ 3)$, C$(a,\ a+4)$ があるとき，次の問に答えよ。

(1)　2 点 A, B を通る直線の方程式を求めよ。

2 点 A$(-2,\ 6)$, B$(7,\ 3)$ を通る直線の方程式は

$$y - 6 = \frac{3-6}{7-(-2)}\{x - (-2)\}$$

すなわち　$\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x + \frac{16}{3}}$

(2)　3 点 A, B, C が一直線上にあるように，定数 a の値を定めよ。

点 C$(a,\ a+4)$ が (1) で求めた直線

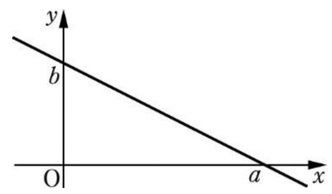
$y = -\frac{1}{3}x + \frac{16}{3}$ 上にあるから

$$a + 4 = -\frac{1}{3}a + \frac{16}{3}$$

ゆえに　$\boldsymbol{a = 1}$

例 12　2 点 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ を通る直線の方程式は，$a \neq 0$, $b \neq 0$ のとき

$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x - a)$



である。これを変形すると

$$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

注意　直線と x 軸との交点の x 座標をその直線の ([14]　x 切片　) という。例 12 の直線では x 切片がa, y 切片が b である。

問 16　x 切片が 3, y 切片が -2 である直線の方程式を求めよ。

x 切片が 3, y 切片が -2 の直線，すなわち，2 点 $(3,\ 0)$, $(0,\ -2)$ を通る直線の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1}$$

(参考)　$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ は空間において，$(a,\ 0,\ 0)$, $(0,\ b,\ 0)$, $(0,\ 0,\ c)$の 3 点を通る平面の方程式を表す。

4 2 直線の関係

2 直線の平行と垂直

（教科書 p.72）

２直線の平行条件・垂直条件

2 直線 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$ について

平行条件は $m=m'$　　**垂直条件は $mm'=-1$**

問 17 次の直線のうち，互いに平行なもの，互いに垂直なものを選べ。

① $y=-2x+5$　　② $x-3y+7=0$

③ $6x+2y+3=0$　　④ $6x+3y=1$

① $y=-2x+5$　　② $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$

③ $y=-3x-\frac{3}{2}$　　④ $y=-2x+\frac{1}{3}$

ゆえに，**互いに平行なもの　①と④**

互いに垂直なもの　②と③

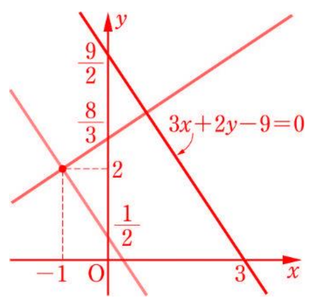
例題 2 点 $(-1,\ 2)$ を通り，直線 $3x+2y-9=0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また，垂直な直線の方程式を求めよ。

解 直線 $3x+2y-9=0$ を l とすると，l の傾きは $-\frac{3}{2}$ である。

よって，l に平行な直線の傾きは $-\frac{3}{2}$ であるから，点 $(-1,\ 2)$ を通り，l に平行な直線の方程式は

$$y-2=-\frac{3}{2}(x+1)$$

すなわち　$3x+2y-1=0$　……答



また，l に垂直な直線の傾きを m とすると

$-\frac{3}{2}m=-1$　　すなわち　$m=\frac{2}{3}$

点 $(-1,\ 2)$ を通り，l に垂直な直線の方程式は

$$y-2=\frac{2}{3}(x+1)$$

すなわち　$2x-3y+8=0$　……答

問 18 点 $(3,\ -1)$ を通り，直線 $2x-5y-1=0$ に平行な直線の方程式を求めよ。また，垂直な直線の方程式を求めよ。

直線 $2x-5y-1=0$ を l とすると，l の傾きは $\frac{2}{5}$ である。

直線 l に平行な直線の傾きは $\frac{2}{5}$ であるから，点 $(3,\ -1)$ を通り，**l に平行な直線の方程式は**

$$y-(-1)=\frac{2}{5}(x-3)$$

すなわち　$\boldsymbol{2x-5y-11=0}$

また，直線 l に垂直な直線の傾きを m とすると

$\frac{2}{5}m=-1$ より　$m=-\frac{5}{2}$

したがって，点 $(3,\ -1)$ を通り，**l に垂直な直線の方程式は**

$$y-(-1)=-\frac{5}{2}(x-3)$$

すなわち　$\boldsymbol{5x+2y-13=0}$

問 19 直線 $ax-2y+5=0$ が直線 $2x+y-10=0$ に垂直であるとき，定数 a の値を求めよ。

直線 $ax-2y+5=0$ の傾きは $\frac{a}{2}$ であり，直線 $2x+y-10=0$ の傾きは -2 である。よって，これら 2 直線が垂直であるから

$$\frac{a}{2}\cdot(-2)=-1$$

ゆえに　$\boldsymbol{a=1}$

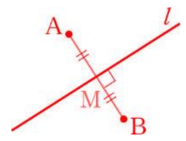
例題 3　直線 $x+2y-10=0$ に関して，点 A(1, 2) と対称な点 B の座標を求めよ。

考え方　2 点 A, B が，ある直線 l に関して対称である条件は

[1]　直線 AB は直線 l に垂直である

[2]　線分 AB の中点 M は直線 l 上にある

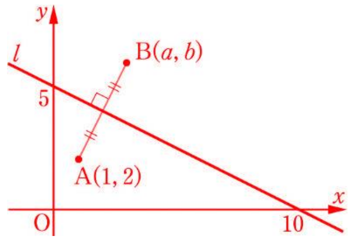
が成り立つことである。



解　直線 $x+2y-10=0$ を l とし，点 B の座標を $(a,\ b)$ とする。

直線 l の傾きは　$-\frac{1}{2}$

直線 AB の傾きは　$\frac{b-2}{a-1}$



$l \perp$ AB であるから

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-2}{a-1}=-1$$

すなわち

$$b=2a \quad \cdots\cdots①$$

また，線分 AB の中点 $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)$ は l 上にあるから

$$\frac{a+1}{2}+2\cdot\frac{b+2}{2}-10=0$$

すなわち　$a+2b-15=0$　……②

①，②より

$$a=3,\ b=6$$

したがって，点 B の座標は　(3, 6)

問 20　直線 $4x-2y-3=0$ に関して，点 A(4, −1) と対称な点 B の座標を求めよ。

直線 $4x-2y-3=0$ を l とし，点 B の座標を $(a,\ b)$ とする。

直線 l の傾きは　2

直線 AB の傾きは　$\frac{b-(-1)}{a-4}=\frac{b+1}{a-4}$

$l \perp$ AB であるから

$$2\cdot\frac{b+1}{a-4}=-1$$

すなわち　$a+2b=2$　……①

また，線分 AB の中点 $\left(\frac{a+4}{2},\ \frac{b-1}{2}\right)$ は l 上にあるから

$$4\cdot\frac{a+4}{2}-2\cdot\frac{b-1}{2}-3=0$$

すなわち　$2a-b+6=0$　……②

①，②より　$a=-2,\ b=2$

ゆえに　**B(−2, 2)**

2 直線の交点

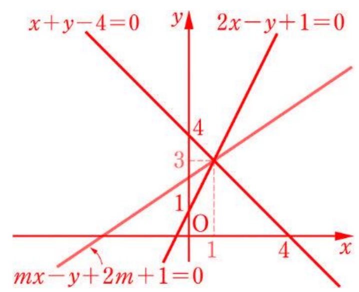
（教科書 p.75）

例題 4　2 直線 $x+y-4=0,\ 2x-y+1=0$ について，次の問に答えよ。

(1)　2 直線の交点の座標を求めよ。

(2)　この 2 直線と直線 $mx-y+2m+1=0$ が 1 点で交わるような定数 m の値を求めよ。

解　(1)　連立方程式



$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$$

を解くと

$$x=1,\ y=3$$

よって，求める交点の座標は

(1, 3)

(2)　直線 $mx-y+2m+1=0$ が点 (1, 3) を通るから

$$m-3+2m+1=0$$

したがって

$$m=\frac{2}{3}$$

問 21 次の 2 直線の交点の座標を求めよ。

(1) $5x-4y+13=0,\quad 3x+y+1=0$

連立方程式 $\begin{cases} 5x-4y+13=0 \\ 3x+y+1=0 \end{cases}$

を解くと　$x=-1,\ y=2$

ゆえに，求める交点の座標は　$\mathbf{(-1,\ 2)}$

(2) $3x-y-6=0,\quad 6x+5y+2=0$

連立方程式 $\begin{cases} 3x-y-6=0 \\ 6x+5y+2=0 \end{cases}$

を解くと　$x=\frac{4}{3},\ y=-2$

ゆえに，求める交点の座標は　$\left(\frac{4}{3},\ -2\right)$

問 22 3 直線

$x-2y+8=0,\qquad 2x+3y-5=0,\qquad mx-y-2m+8=0$

が 1 点で交わるとき，定数 m の値を求めよ。

連立方程式 $\begin{cases} x-2y+8=0 \\ 2x+3y-5=0 \end{cases}$

を解くと　$x=-2,\ y=3$

よって，2 直線 $x-2y+8=0$，$2x+3y-5=0$ の交点の座標は　$(-2,\ 3)$

直線 $mx-y-2m+8=0$ がこの交点を通るから

$m\cdot(-2)-3-2m+8=0$

ゆえに　$\boldsymbol{m=\frac{5}{4}}$

2 直線の交点を通る直線

（教科書 p.76）

2 直線 $x+y-4=0$，$2x-y+1=0$ に対して，方程式

（⑮　$k(x+y-4)+(2x-y+1)=0$　）　……①

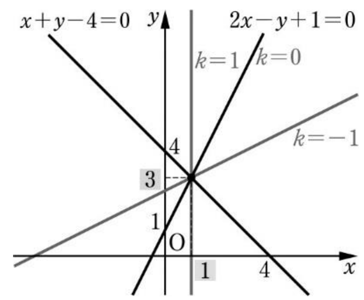
を考える。ただし，k は定数とする。

方程式①が 2 直線の交点を通る直線を表すことを示してみよう。

$x+y-4=0,\ 2x-y+1=0$

を同時に満たす x，y の値の組 $x=1$，$y=3$ は k の値に関係なく①を満たす。

よって，①で表される図形は 2 直線の交点 $(1,\ 3)$ を通る。



また，①を変形すると

$(k+2)x+(k-1)y+(-4k+1)=0$　……②

$k+2$ と $k-1$ は同時には 0 にならないから，②の表す図形は直線である。

よって，①は 2 直線 $x+y-4=0$，$2x-y+1=0$ の交点 $(1,\ 3)$ を通る直線を表す。

例題 5 2 直線 $3x+4y-17=0$，$x-2y+1=0$ の交点と点 $(2,\ 3)$ を通る直線の方程式を求めよ。

解 k を定数として，2 直線の交点を通る直線の方程式を

$k(3x+4y-17)+(x-2y+1)=0$　……①

とおく。①に点 $(2,\ 3)$ の座標 $x=2$，$y=3$ を代入すると

$k(3\cdot2+4\cdot3-17)+(2-2\cdot3+1)=0$ より　$k=3$

これを①に代入して整理すると，求める直線の方程式は

$x+y-5=0$

問 23 2 直線 $4x-5y+5=0$，$x+2y-6=0$ の交点と点 $(1,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ。

k を定数として，2 直線の交点を通る直線の方程式を

$k(4x-5y+5)+(x+2y-6)=0$　……①

とおく。①に点 $(1,\ 1)$ の座標を代入すると

$k(4\cdot1-5\cdot1+5)+(1+2\cdot1-6)=0$

より　$k=\frac{3}{4}$

これを①に代入して整理すると，求める直線の方程式は

$\mathbf{16x-7y-9=0}$

点と直線の距離

（教科書 p.77）

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

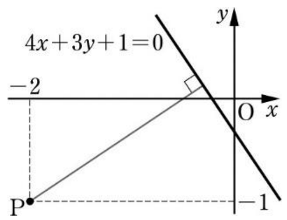
$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

例 13 点 P$(-2,\ -1)$ と直線

$4x+3y+1=0$

の距離 d は

$$d=\frac{|4\cdot(-2)+3\cdot(-1)+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$



問 24 次の点と直線の距離を求めよ。

(1) 原点と直線 $x+2y+2=0$

$$\frac{|0+2\cdot0+2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt5}=\frac{2\sqrt5}{5}$$

(2) 点 $(3,\ 4)$ と直線 $2x-3y+1=0$

$$\frac{|2\cdot3-3\cdot4+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{5}{\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{13}$$

(3) 点 $(7,\ -1)$ と直線 $y=-3x+6$

直線の式を変形して

$3x+y-6=0$

ゆえに

$$\frac{|3\cdot7-1-6|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{10}}=\frac{7\sqrt{10}}{5}$$

（参考） 空間において，平面の方程式は $ax+by+cz+d=0$ と表され，

点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ の距離は

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

である。(数学 B の教科書参照)

座標を用いた図形の性質の証明

（教科書 p.78）

応用例題 6 △ABC の辺 BC の中点を M とすると

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

であることを証明せよ。

証明 M を原点とし，直線 BC を x 軸にとると，

三角形の頂点A，B，C の座標はそれぞれ

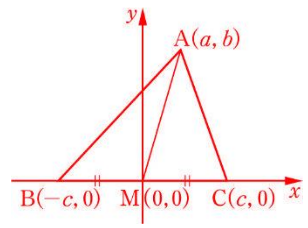
A$(a,\ b)$，B$(-c,\ 0)$，C$(c,\ 0)$

とおける。このとき

$AB^2+AC^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}=2(a^2+b^2+c^2)$

$AM^2+BM^2=(a^2+b^2)+c^2=a^2+b^2+c^2$

ゆえに　$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$



問 25 △ABC の辺 BC を 1 : 2 に内分する点を D とすると

$$2AB^2+AC^2=3(AD^2+2BD^2)$$

であることを証明せよ。

D を原点とし，直線BC を x 軸にとると，三角形の頂点A，B，C の座標はそれぞれ

A$(a,\ b)$，

B$(-c,\ 0)$，

C$(2c,\ 0)$

とおける。このとき

$2AB^2+AC^2$

$=2\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-2c)^2+b^2\}$

$=3a^2+3b^2+6c^2$

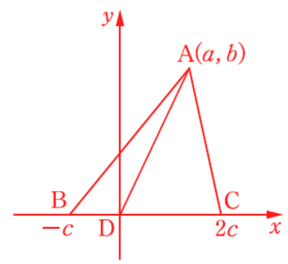
$=3(a^2+b^2+2c^2)$

AD^2+2BD^2

$=(a^2+b^2)+2c^2=a^2+b^2+2c^2$

ゆえに

$2AB^2+AC^2=3(AD^2+2BD^2)$



応用例題 7

△ ABC の 3 つの頂点から，それぞれの対辺に下ろした垂線 AL，BM，CN は 1 点で交わることを証明せよ。

証明

△ ABC が直角三角形ならば，明らかに 3 本の垂線は直角の頂点で交わる。

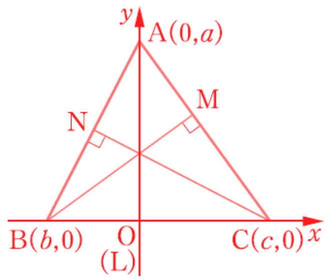
次に，△ ABC が直角三角形でないならば，直線 BC を x 軸，垂線 AL を y 軸にとると，A$(0,\ a)$，B$(b,\ 0)$，C$(c,\ 0)$ とおける。

ただし，$a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$ である。

直線 AC の傾きは $-\frac{a}{c}$ であるから，

垂線 BM の方程式は

$$y = \frac{c}{a}(x - b)$$



また，直線 AB の傾きは $-\frac{a}{b}$ であるから，垂線 CN の方程式は

$$y = \frac{b}{a}(x - c)$$

直線 BM，CN はともに y 軸上の点 $\left(0,\ -\frac{bc}{a}\right)$ を通る。

したがって，3 本の垂線 AL，BM，CN は 1 点で交わる。

例題 7 における 3 本の垂線の交点を△ ABC の（⑯　垂心　）という。

問 26 △ ABC において，各辺の垂直二等分線は，1 点で交わることを証明せよ。

△ ABC が直角三角形ならば，明らかに 3 本の垂直二等分線は斜辺の中点で交わる。

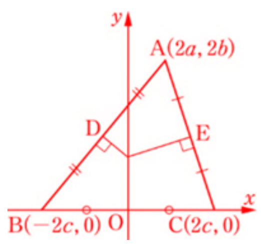
次に，△ ABC が直角三角形でないならば，辺 BC の中点を原点とし，直線 BC をx 軸にとると，三角形の頂点 A，B，C の座標はそれぞれ

A$(2a,\ 2b)$，

B$(-2c,\ 0)$，

C$(2c,\ 0)$

とおける。



ただし，$a \neq \pm c$，$b \neq 0$，$c \neq 0$ である。

辺 BC の垂直二等分線の方程式は

$x = 0$ ……①

直線 CA の傾きは

$$\frac{2b - 0}{2a - 2c} = \frac{b}{a - c}$$

であるから，辺 CA の垂直二等分線は，この辺の中点 $(a + c,\ b)$ を通り，傾き $-\frac{a-c}{b}$の直線であり，その方程式は

$$y - b = -\frac{a - c}{b}\{x - (a + c)\}$$

すなわち

$$y = -\frac{a-c}{b}x + \frac{a^2+b^2-c^2}{b} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②の交点の座標は

$$\left(0,\ \frac{a^2+b^2-c^2}{b}\right) \quad \cdots\cdots ③$$

また，直線 AB の傾きは

$$\frac{2b - 0}{2a - (-2c)} = \frac{b}{a + c}$$

であるから，辺 AB の垂直二等分線は，この辺の中点 $(a - c,\ b)$ を通り，傾き $-\frac{a+c}{b}$の直線であり，その方程式は

$$y - b = -\frac{a + c}{b}\{x - (a - c)\}$$

すなわち

$$y = -\frac{a+c}{b}x + \frac{a^2+b^2-c^2}{b} \quad \cdots\cdots ④$$

①，④の交点の座標は

$$\left(0,\ \frac{a^2+b^2-c^2}{b}\right) \quad \cdots\cdots ⑤$$

③，⑤は同一の点であるから，△ ABC の各辺の垂直二等分線は，1 点で交わる。