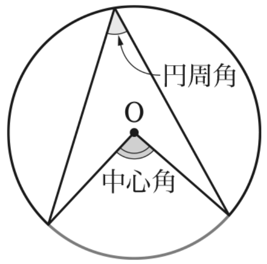
3 節 三角形への応用

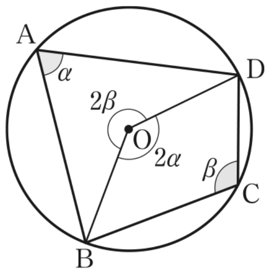
1 正弦定理

（教科書 p.138）

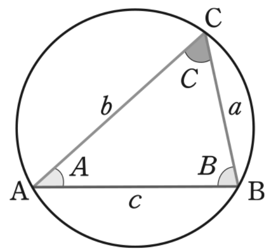
> 1 つの弧に対する円周角の大きさは，
> その弧に対する中心角の半分である。



円周角の定理を用いて，円に内接する四角形の対角の和を求めてみよう。



右の図のように，$\angle\mathrm{DAB}=\alpha$，$\angle\mathrm{BCD}=\beta$ とすると，円周角の定理により，
弧 BCD に対する中心角は 2α，弧 DAB に対する中心角は 2β となる。
ゆえに，$2\alpha+2\beta=360°$ より　$\alpha+\beta=180°$
すなわち　　　$A+C=180°$
同様に　　　$B+D=180°$
したがって，円に内接する四角形の対角の和は 180° である。



今後，△ ABC の 3 つの角 ∠A，∠B，∠C の対辺の長さをそれぞれ a，b，c で表す。
三角形の 3 つの頂点を通る円はただ 1 つ定まる。
これを，その三角形の（1　　　　　　　　）という。
△ ABC の外接円の半径を R とすると，次の（2　　　　　　　　）が成り立つ。

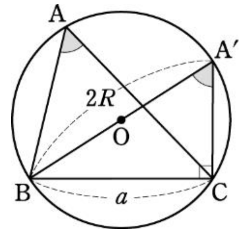
正弦定理
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$ R は △ ABC の外接円の半径

証明 まず，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$，すなわち

$a=2R\sin A$　　　　…… ①

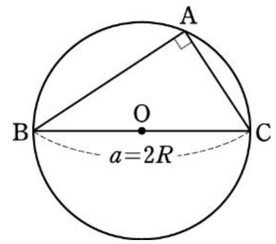
が成り立つことを示す。

（ⅰ）A が鋭角であるとき



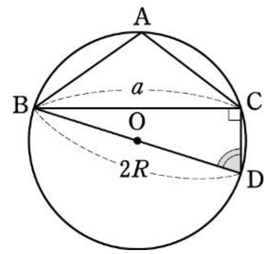
点 B を通る直径を引き，BA′ とする。
円周角の定理から　$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BA'C}$
また，BA′ は直径であるから
$\angle\mathrm{A'CB}=90°$
よって　$a=\mathrm{BA'}\sin A'=2R\sin A$

（ⅱ）A が直角であるとき



BC は外接円の直径であり
$\sin 90°=1$ であるから
$a=2R=2R\sin A$

（ⅲ）A が鈍角であるとき



点 B を通る直径を引き，BD とすると
$\angle\mathrm{DCB}=90°$
四角形 ABCD は円に内接するから
$A+D=180°$
よって　$a=\mathrm{BD}\sin D=2R\sin(180°-A)$
$=2R\sin A$

したがって，（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）のいずれの場合にも，①が成り立つ。
同様にして，次の等式が成り立つ。

$b=2R\sin B$　　　　…… ②

$c=2R\sin C$　　　　…… ③

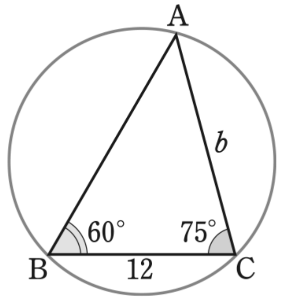
①，②，③より　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

三角形の 1 辺の長さと 2 つの角の大きさがわかっているとき，正弦定理を用いて他の辺の長さや外接円の半径を求めることができる。

例題 1 △ ABC において，$a = 12$，$B = 60°$，$C = 75°$ のとき，b を求めよ。
また，この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

解 $A = 180° - (60° + 75°) = 45°$
正弦定理により

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ であるから



ゆえに　　$b =$

また　　$2R = \frac{a}{\sin A}$

$=$

問1 △ ABC において，$a = 10$，$A = 120°$，$C = 15°$ のとき，b を求めよ。
また，この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

問2 △ ABC の外接円の半径を R とする。$A = 135°$，$R = 4$ のとき，a を求めよ。

三角形の 2 辺の長さとその辺に対する 1 つの対角の大きさがわかっているとき，正弦定理を用いて他の 2 つの角の大きさを求めることができる。

例題 2 △ABC において，$b=2$，$c=\sqrt{6}$，$B=45°$ のとき，C，A を求めよ。

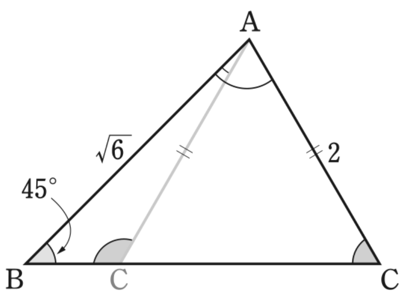
解 正弦定理により

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

◀ 2 辺と 1 対角から他の対角を求めるとき，正弦定理を利用

であるから

$\sin C=$



したがって　$C=60°$　または　$C=120°$

$C=60°$ のとき

$A=180°-(B+C)$

$=$

$C=120°$ のとき

$A=180°-(B+C)$

$=$

問3 △ABC において，$a=2\sqrt{2}$，$b=2$，$A=135°$ のとき，B，C を求めよ。

問4 △ABC において，$b=6$，$c=2\sqrt{3}$，$C=30°$ のとき，A，B，a を求めよ。

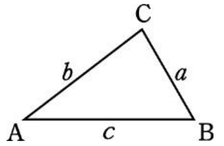
2 余弦定理

（教科書 p.142）

△ABC の 1 つの角と 3 辺の長さの間に次の（¹　　　　　　　）が成り立つ。

余弦定理

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$$
$$\boldsymbol{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B}$$
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$$



証明 △ABC に対して右の図のように座標軸を定めると，3 頂点 A，B，C の座標は次のようになる。

A(0，0)，B(c，0)

C($b\cos A$，$b\sin A$)

また，CH ⊥ AB となるような x 軸上の点 H($b\cos A$，0) をとる。

直角三角形 BCH を考えて

$a^2 = \mathrm{BC}^2 = \mathrm{HB}^2 + \mathrm{HC}^2$

である。点 H の位置に応じて

$\mathrm{HB} = c - b\cos A$

または　$\mathrm{HB} = b\cos A - c$

が成り立つ。

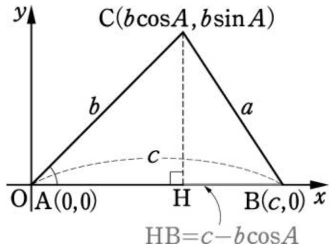
いずれの場合も

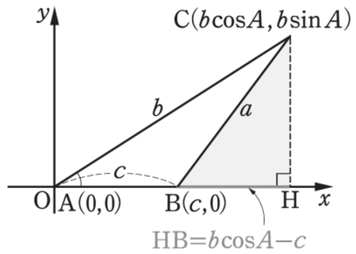
$a^2 = (c - b\cos A)^2 + (b\sin A)^2$

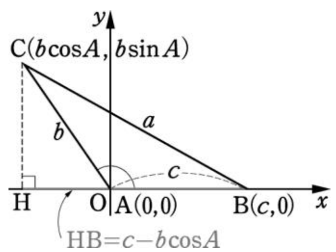
$\quad = c^2 - 2bc\cos A + b^2(\cos^2 A + \sin^2 A)$

$\quad = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

同様にして，他の 2 つの式も得られる。



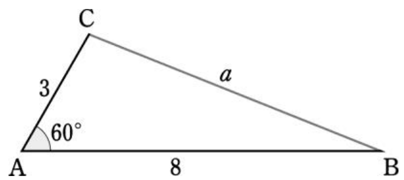




例 1 △ABC において，$b = 3$，$c = 8$，$A = 60°$ ならば，余弦定理により

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$\quad =$



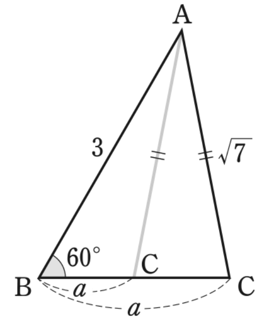
問5 △ABC において，$a = 1$，$b = \sqrt{3}$，$C = 150°$ のとき，c を求めよ。

例題 3 △ABC において，$b = \sqrt{7}$，$c = 3$，$B = 60°$ のとき，a を求めよ。

解 余弦定理により，$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ であるから

$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 3^2 + a^2 - 2\cdot 3\cdot a\cos 60°$

よって



問6 △ABC において，$a = \sqrt{7}$，$b = 1$，$A = 120°$ のとき，c を求めよ。

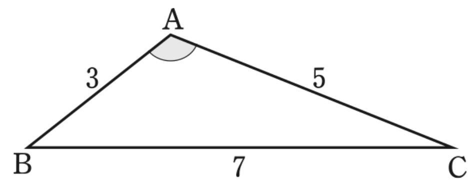
余弦定理を変形すると，次の式が得られる。

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

よって，三角形の 3 辺の長さから，角の大きさを求めることができる。

例 2 △ABC において，$a = 7$，$b = 5$，$c = 3$ ならば，余弦定理により

$\cos A =$



ゆえに

問7 △ABC において，$a = 5$，$b = 8$，$c = 7$ のとき，C を求めよ。

三角形の辺と角の大きさ

（教科書 p.144）

△ABC において，余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

であるから，$\cos A$ の値の符号と，$b^2+c^2-a^2$ の値の符号は一致する。

したがって，次のことがわかる。

$a^2 < b^2 + c^2 \iff A < 90°$

$a^2 = b^2 + c^2 \iff A = 90°$

$a^2 > b^2 + c^2 \iff A > 90°$

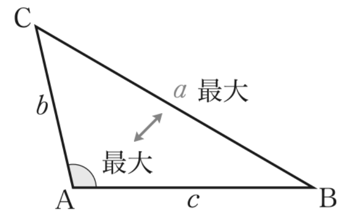
問8 次の△ABC において，A は鋭角，直角，鈍角のいずれであるか。

(1)　$a = 11$，$b = 8$，$c = 7$

(2)　$a = 7$，$b = 5$，$c = 6$

三角形において，角の大小と対辺の大小は一致することが知られている。とくに，最大辺の対角が最大角である。

すべての角が鋭角である三角形を（2　　　　　　　　）といい，ある角が鈍角である三角形を（3　　　　　　　　）という。



例 3 $a = 7$，$b = 6$，$c = 4$ のとき，△ABC は鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるかを調べてみよう。

最大辺が a であるから，その対角 A が最大角である。

ここで　$a^2 = 7^2 = 49$，$b^2 + c^2 = 6^2 + 4^2 = 52$

よって

したがって

問9 $a = 4$，$b = 8$，$c = 9$ のとき，△ABC は鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるか。

三角形の決定

（教科書 p.145）

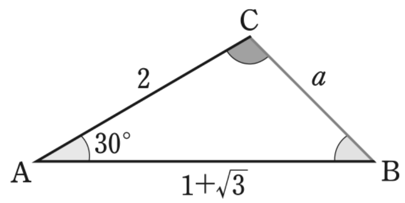
例題 4 △ABC において，$b=2$，$c=1+\sqrt{3}$，$A=30^\circ$ のとき，a，B，C を求めよ。

解 余弦定理により

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=$

◀ 2辺とその間の角から角の対辺を求めるとき，余弦定理を利用



また，正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

より

$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=$

B の対辺 b は最大辺ではないから，B は最大角ではない。

よって，B は鋭角であるから

$B=$

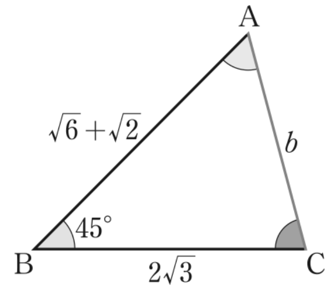
したがって

$C=$

問 10 △ABC において

$a=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$B=45^\circ$

のとき，b，A，C を求めよ。



3 三角形の面積

（教科書 p.146）

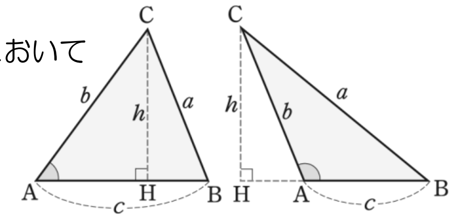
△ ABC の面積 S を，2 辺とその間の角によって表してみよう。

△ ABC の辺 AB から頂点 C までの高さを h とすると，右の図において

$h = b\sin A$

したがって

$S = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc\sin A$



他の 2 辺とその間の角からも，同様の公式が得られる。

三角形の面積
$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C}$

問 11　次の △ ABC の面積 S を求めよ。

(1)　$b = 2$，$c = 5$，$A = 60°$

(2)　$a = 7$，$b = 4$，$C = 135°$

例題 5　$a = 13$，$b = 14$，$c = 15$ である △ ABC の面積 S を求めよ。

解　余弦定理により

$\cos A =$

よって　$\sin A =$

ゆえに，三角形の面積の公式により

$S =$

問 12　$a = 13$，$b = 8$，$c = 7$ である △ ABC の面積 S を求めよ。

円に内接する四角形

（教科書 p.147）

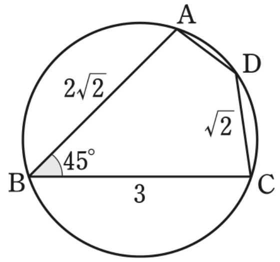
応用例題 6　円に内接する四角形 ABCD において

$AB=2\sqrt{2}$，$BC=3$，$CD=\sqrt{2}$，

$\angle ABC=45°$

とするとき，AD を求めよ。

また，四角形 ABCD の面積 S を求めよ。



解　対角線 AC を引き，△ ABC に余弦定理を用いると

$AC^2=$

四角形 ABCD は円に内接するから　$D=$

$AD=x$ として，△ ACD に余弦定理を用いると

$(\sqrt{5})^2=x^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot x\cdot\sqrt{2}\cos 135°$

また　　$S=$△ ABC +△ ACD

$=$

問 13　円に内接する四角形 ABCD において，$AB=5$，$BC=4$，$CD=4$，$\angle ABC=60°$ とするとき，AD を求めよ。

また，四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

三角形の内接円の半径と面積

（教科書 p.148）

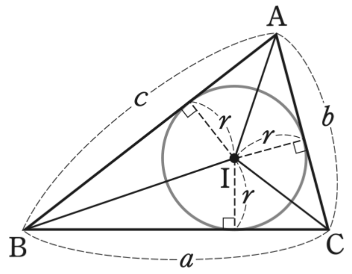
△ABC の 3 辺 AB，BC，CA のすべてに接する円はただ 1 つ存在する。

これを△ABC の（1　　　　　　　）という。

△ABC の内接円の半径を r，中心を I とすると，△ABC の面積 S は

$S =$△IBC +△ICA +△IAB $=$

すなわち　$S =$



例題 7　3 辺の長さが $a = 3$，$b = 7$，$c = 8$ である△ABC がある。このとき，次の問に答えよ。

(1)　△ABC の面積 S を求めよ。

(2)　△ABC の内接円の半径 r を求めよ。

解　(1)　余弦定理により

$\cos A =$

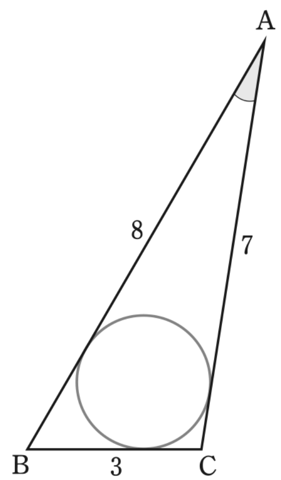
よって　$\sin A =$

ゆえに，求める面積 S は

$S =$

(2)　$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ より

ゆえに，求める半径 r は



問 14　$a = 7$，$b = 6$，$c = 5$ である△ABC の内接円の半径 r を求めよ。

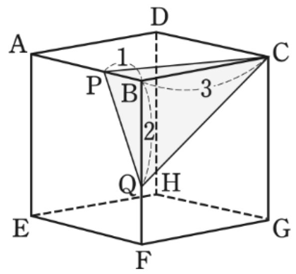
4 空間図形の計量

（教科書 p.149）

例題 8 1 辺の長さが 3 の立方体 ABCD − EFGH の辺 AB 上に点 P，辺 BF 上に点 Q を

$\mathrm{BP} = 1,\ \mathrm{BQ} = 2$

となるようにとる。このとき，△ CPQ の面積 S を求めよ。



解 △CPQ の 3 辺の長さは

$\mathrm{PQ} =$

$\mathrm{CP} =$

$\mathrm{CQ} =$

である。$\angle\mathrm{CPQ} = \theta$ とおくと，余弦定理により

$\cos\theta = \frac{\mathrm{CP}^2+\mathrm{PQ}^2-\mathrm{CQ}^2}{2\cdot\mathrm{CP}\cdot\mathrm{PQ}} =$

よって　$\sin\theta =$

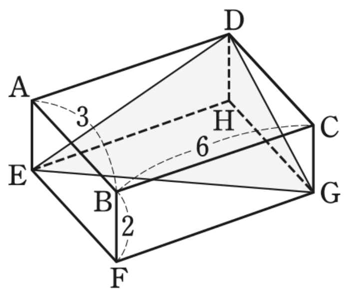
ゆえに，求める面積 S は

$S =$

問 15 右の図の直方体 ABCD − EFGH において

$\mathrm{AB} = 3,\ \mathrm{BC} = 6,\ \mathrm{BF} = 2$

である。このとき，△ DEG の面積 S を求めよ。

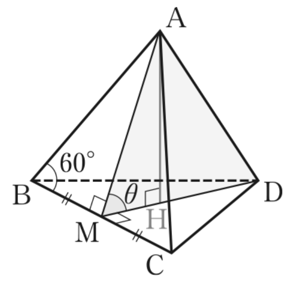


応用 例題 9

1 辺の長さが a の正四面体 ABCD において，辺 BC の中点を M とし，頂点 A から DM に下ろした垂線を AH とする。
$\angle\mathrm{AMD} = \theta$ とするとき，次の問に答えよ。

(1)　$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　AH の長さを a で表せ。



解 (1)　AM および DM の長さを求める。

M は正三角形 ABC の辺 BC の中点であるから

$\angle\mathrm{ABM} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{AMB} = 90^\circ$

よって　$\mathrm{AM} =$

同様に　$\mathrm{DM} =$

$\triangle$ AMD に対して余弦定理を用いると，$\cos\theta$ の値は

$\cos\theta =$

(2)　(1)で得られた $\cos\theta$ の値から $\sin\theta$ の値を求めると

$\sin\theta =$

よって

$\mathrm{AH} =$

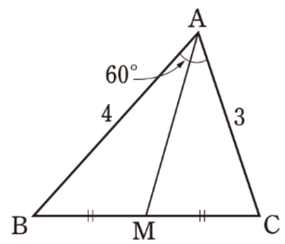
問 16 例題９において，正四面体 ABCD の体積 V を a で表せ。

問 題

（教科書 p.151）

11　△ABC において，$\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ であるとき，3 辺 a，b，c の間に成り立つ関係式を答えよ。
また，△ABC はどのような三角形か。

12　△ABC において，AB = 4，AC = 3，A = 60° とし，辺 BC の中点を M とする。
このとき，次の値を求めよ。

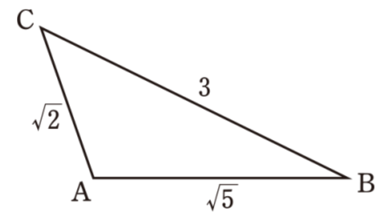


(1)　BC

(2)　$\cos B$

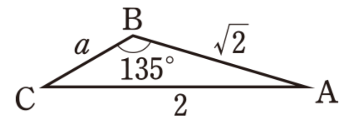
(3)　AM

13　△ABC において，その面積を S とするとき，次の問に答えよ。

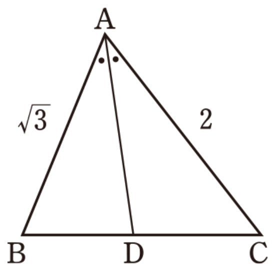


(1)　$a = 3$，$b = \sqrt{2}$，$c = \sqrt{5}$ のとき，C，S を求めよ。

(2)　$c = \sqrt{2}$，$b = 2$，$B = 135°$ のとき，C，a，S を求めよ。



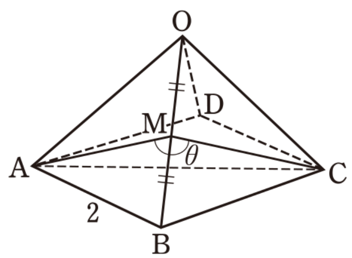
14 △ABCにおいて，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=2$，$A=60°$とし，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとする。このとき，次の問に答えよ。



(1) △ABCの面積Sを求めよ。

(2) ADを求めよ。

15 1辺の長さが2の正方形ABCDを底面とし，4個の正三角形を側面とする正四角錐OABCDがある。辺OBの中点をM，$\angle\mathrm{AMC}=\theta$とするとき，$\cos\theta$の値を求めよ。



発展 三角形の形状

（教科書 p.152）

三角形において，与えられた辺や角の三角比の等式から，その三角形がどのような形であるかを求めてみよう。

例題 1 △ABC において，次の等式が成り立つとき，この三角形はどのような形の三角形か。

$\sin A \cos B = \sin C$

解 △ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$\sin A = \frac{a}{2R}$，$\sin C = \frac{c}{2R}$

余弦定理により

$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

これらを与えられた等式に代入すると

問1 △ABC おいて，次の等式が成り立つとき，この三角形はどのような形の三角形か。

(1) $a \sin A = b \sin B$

(2) $a \cos A + b \cos B = c \cos C$

発展　ヘロンの公式

（教科書 p.153）

3 辺 a，b，c が与えられたときの △ABC の面積 S を求めてみよう。

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$ の両辺を 2 倍してから 2 乗すると

$$4S^2=b^2c^2\sin^2 A$$
$$=b^2c^2\,(1-\cos^2 A)$$
$$=b^2c^2\,(1+\cos A)\,(1-\cos A) \qquad \cdots\cdots①$$

余弦定理により　$1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$

$$=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}$$

同様にして　　$1-\cos A=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$

ここで，$a+b+c=2s$ とおくと

$-a+b+c=2(s-a)$，$a-b+c=2(s-b)$，$a+b-c=2(s-c)$

よって　$1+\cos A=\frac{2s(s-a)}{bc}$，$1-\cos A=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc}$

これらを①に代入して　$4S^2=4s(s-a)(s-b)(s-c)$

したがって　　　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ヘロンの公式
$\boldsymbol{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$　　ただし，$\boldsymbol{s=\frac{a+b+c}{2}}$

例 1　3 辺の長さが 4，5，7 である三角形の面積 S を求めてみよう。

ヘロンの公式により，$s=\frac{4+5+7}{2}=8$ であるから

$S=$

問1　3 辺の長さが 5，6，9 である三角形の面積 S を求めよ。