2 節 円

1 円の方程式

（教科書 p.81）

円の方程式
点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ とくに，原点を中心とする半径 r の円の方程式は $x^2+y^2=r^2$

問1　点 $(2,\ -1)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円の方程式を求めよ。

例 1　点 $\mathrm{A}(3,\ -1)$ を中心とし，原点 O を通る円の方程式を求めてみよう。

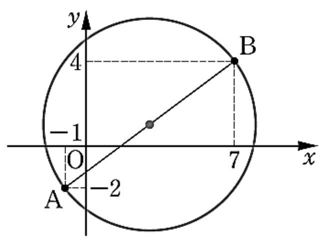
この円の半径は　　$\mathrm{OA}=$

したがって，この円の方程式は

問2　点 $(-2,\ 3)$ を中心とし，原点を通る円の方程式を求めよ。

問3　2 点 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$，$\mathrm{B}(7,\ 4)$ を直径の両端とする円について，次のものを求めよ。

（1）　円の中心の座標



(2)　円の方程式

$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

（教科書 p.82）

円の方程式　　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

の左辺を展開して整理すると

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

となる。この式は，$l,\ m,\ n$ を定数として

（①　　　　　　　　　　　　　　）

の形である。

例 2　方程式 $x^2+y^2-2x-8y-2=0$ で表される図形について考えてみよう。この方程式を変形すると

◀ x を含む項，y を含む項に整理

◀ 平方完成する

よって，この方程式は点（　　　　　　）を中心とする半径（　　　　　　）の円を表す。

問4　次の方程式はどのような図形を表すか。

（1）　$x^2+y^2-6x+4y+4=0$

(2)　$x^2+y^2+5y+2=0$

(3)　$x^2+y^2+4x-10y+29=0$

問5 方程式 $x^2+y^2+x-3y+n=0$ が円を表すような定数 n の値の範囲を求めよ。

例題 1 3 点 A$(-7,\ 5)$，B$(-3,\ 7)$，C$(0,\ -2)$ を通る円の方程式を求めよ。

解

例題 1 で求めた円は，3 点 A，B，C を頂点とする△ ABC の外接円である。一般に，三角形の外接円の中心をその三角形の（② ）という。

問6 3 点 A$(6,\ 2)$，B$(2,\ -4)$，C$(7,\ -3)$ がある。このとき，次の問に答えよ。

(1) 3 点 A，B，C を通る円の方程式を求めよ。

(2) △ ABC の外心の座標と，外接円の半径を求めよ。

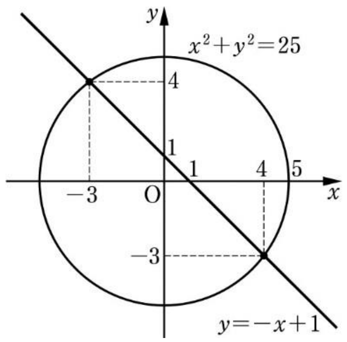
2 円と直線

円と直線の共有点

（教科書 p.84）

例 3 直線 $y=-x+1$ と円 $x^2+y^2=25$ の共有点の座標を求めてみよう。共有点の座標は次の連立方程式の実数解として得られる。

$$\begin{cases} y=-x+1 & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2=25 & \cdots\cdots② \end{cases}$$



①を②に代入すると

整理すると

これを解くと

①より，$x=$（　　　　）のとき　$y=$（　　　　）

$x=$（　　　　）のとき　$y=$（　　　　）

よって，共有点の座標は（　　　　），（　　　　）である。

問7 円 $x^2+y^2=10$ と次の直線の共有点の座標を求めよ。

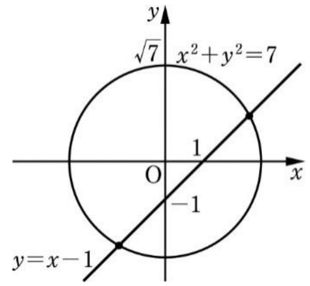
（1）　$2x+y-5=0$

（2）　$x-3y+10=0$

円と直線の共有点の個数は，判別式 $D=b^2-4ac$ の符号によって次のようになる。

円と直線の共有点
$D>0 \iff$ 円と直線の**共有点は 2 個**
$D=0 \iff$ 円と直線の**共有点は 1 個**
$D<0 \iff$ 円と直線の**共有点はない**

例 4 (1)　円 $x^2+y^2=7$ と直線 $y=x-1$ の共有点の個数を求めてみよう。この 2 式を連立させて y を消去すると



$$x^2+(x-1)^2=7$$

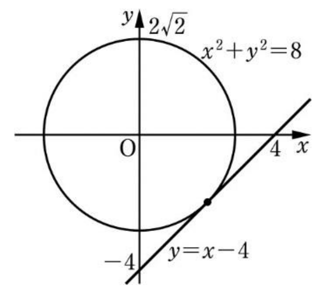
すなわち　$x^2-x-3=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=$

であるから，この円と直線の共有点は（　　　　）個ある。

(2)　円 $x^2+y^2=8$ と直線 $y=x-4$ の共有点の個数を求めてみよう。この 2 式を連立させて y を消去すると



$$x^2+(x-4)^2=8$$

すなわち　$x^2-4x+4=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=$

であるから，この円と直線の共有点は（　　　　）個ある。

例 4 (2)のように，円と直線がただ 1 つの共有点をもつとき，円と直線は（③　　　　　）といい，その直線を（④　　　　），共有点を（⑤　　　　）という。

問8 次の円と直線の共有点の個数を求めよ。

(1) $x^2+y^2=13,\ y=-x+1$

(2) $x^2+y^2=5,\ y=2x+5$

(3) $x^2+y^2=4,\ y=x+3$

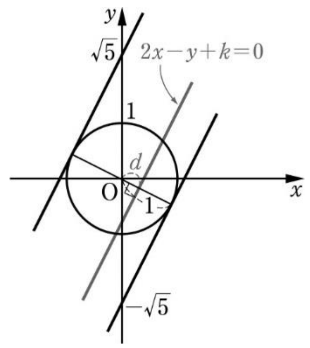
応用例題 2 ▶解

直線 $y=2x+k$ が円 $x^2+y^2=1$ と共有点をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。

問9 直線 $y=3x+k$ が円 $x^2+y^2=4$ と共有点をもたないように，定数 k の値の範囲を定めよ。

例 5 前ページの例題 2 は次のようにも考えられる。円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $2x-y+k=0$ の距離を d とすると，円の半径は 1 であるから，$d \leqq 1$ のとき，円と直線は共有点をもつ。
77 ページで学んだ点と直線の距離の公式により

$d=$



$d \leqq 1$ より　　　　すなわち

したがって

問 10 円 $x^2+y^2=9$ と直線 $3x+4y-k=0$ が接するように，定数 k の値を定めよ。

弦の長さ

（教科書 p.87）

応用例題 3 円 $x^2+y^2=2$ と直線 $x-y-1=0$ の 2 つの交点を結ぶ線分の長さ l を求めよ。

解

問 11 円 $x^2+y^2=8$ と直線 $y=-2x+5$ の 2 つの交点を結ぶ線分の長さ l を求めよ。