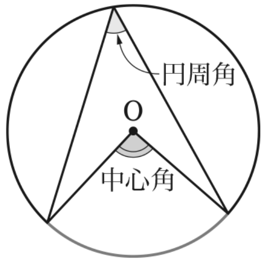
3節 三角形への応用

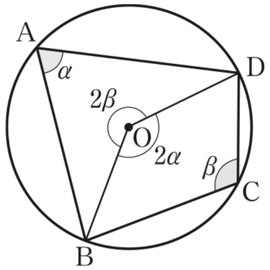
1 正弦定理

（教科書 p.138）

1 つの弧に対する円周角の大きさは，
その弧に対する中心角の半分である。



円周角の定理を用いて，円に内接する四角形の対角の和を求めてみよう。



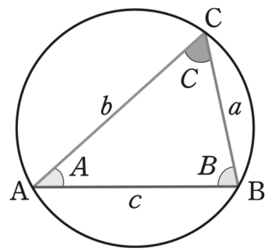
右の図のように，$\angle\mathrm{DAB}=\alpha$，$\angle\mathrm{BCD}=\beta$ とすると，円周角の定理により，
弧 BCD に対する中心角は 2α，弧 DAB に対する中心角は 2β となる。
ゆえに，$2\alpha+2\beta=360^\circ$ より　$\alpha+\beta=180^\circ$

すなわち　　　$A+C=180^\circ$

同様に　　　$B+D=180^\circ$

したがって，円に内接する四角形の対角の和は 180° である。

今後，△ABC の 3 つの角 ∠A，∠B，∠C の対辺の長さをそれぞれ a，b，c で表す。



三角形の 3 つの頂点を通る円はただ 1 つ定まる。

これを，その三角形の（1　外接円　）という。

△ABC の外接円の半径を R とすると，次の（2　正弦定理　）が成り立つ。

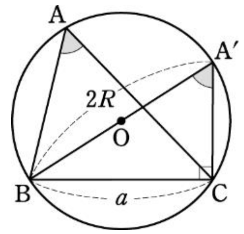
正弦定理
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$ R は △ABC の外接円の半径

証明 まず，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$，すなわち

$$a=2R\sin A \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを示す。

（ⅰ）　A が鋭角であるとき



点 B を通る直径を引き，BA′ とする。

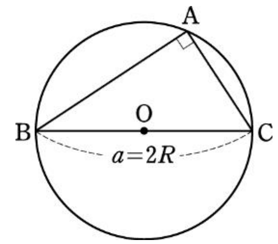
円周角の定理から　$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BA'C}$

また，BA′ は直径であるから

$$\angle\mathrm{A'CB}=90^\circ$$

よって　$a=\mathrm{BA'}\sin A'=2R\sin A$

（ⅱ）　A が直角であるとき

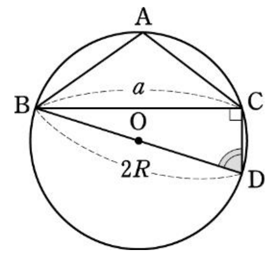


BC は外接円の直径であり

$\sin 90^\circ=1$ であるから

$$a=2R=2R\sin A$$

（ⅲ）　A が鈍角であるとき



点 B を通る直径を引き，BD とすると

$$\angle\mathrm{DCB}=90^\circ$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$A+D=180^\circ$$

よって　$a=\mathrm{BD}\sin D=2R\sin(180^\circ-A)$

$$=2R\sin A$$

したがって，（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）のいずれの場合にも，①が成り立つ。

同様にして，次の等式が成り立つ。

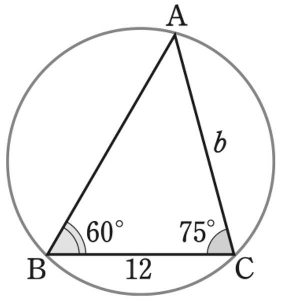
$$b=2R\sin B \qquad \cdots\cdots ②$$

$$c=2R\sin C \qquad \cdots\cdots ③$$

①，②，③より　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

三角形の 1 辺の長さと 2 つの角の大きさがわかっているとき，正弦定理を用いて他の辺の長さや外接円の半径を求めることができる。

例題 1　△ABC において，$a=12$，$B=60°$，$C=75°$ のとき，b を求めよ。
また，この三角形の外接円の半径 R を求めよ。



解　$A=180°-(60°+75°)=45°$

正弦定理により

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ であるから

$$\frac{12}{\sin 45°}=\frac{b}{\sin 60°}$$

ゆえに　$b=\dfrac{12\sin 60°}{\sin 45°}$

$=12\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=6\sqrt{6}$　……答

また　$2R=\dfrac{a}{\sin A}$

$=\dfrac{12}{\sin 45°}$

$=12\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=12\sqrt{2}$

ゆえに　$R=6\sqrt{2}$　……答

問1　△ABC において，$a=10$，$A=120°$，$C=15°$ のとき，b を求めよ。
また，この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

$B=180°-(120°+15°)=45°$

正弦定理により，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ であるから

$$b=\frac{10\sin 45°}{\sin 120°}=10\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{10\sqrt{6}}{3}$$

また，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ より

$$2R=\frac{10}{\sin 120°}=10\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$$

ゆえに　$R=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

問2　△ABC の外接円の半径を R とする。$A=135°$，$R=4$ のとき，a を求めよ。

正弦定理により，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ であるから

$$a=2R\sin A=2\cdot 4\cdot\sin 135°=4\sqrt{2}$$

　三角形の 2 辺の長さとその辺に対する 1 つの対角の大きさがわかっているとき，正弦定理を用いて他の 2 つの角の大きさを求めることができる。

例題 2　△ABC において，$b=2$，$c=\sqrt{6}$，$B=45°$ のとき，C，A を求めよ。

解　正弦定理により

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

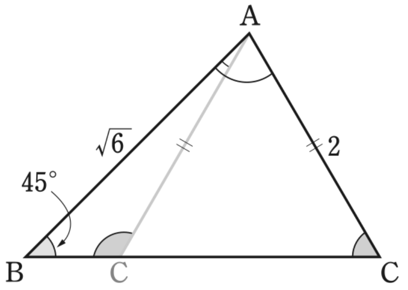
◀ 2 辺と 1 対角から他の対角を求めるとき，正弦定理を利用

であるから

$$\sin C=\frac{c\sin B}{b}$$

$$=\frac{\sqrt{6}\sin 45°}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



したがって　$C=60°$　または　$C=120°$

$C=60°$ のとき

$A=180°-(B+C)$

$=180°-(45°+60°)$

$=75°$

$C=120°$ のとき

$A=180°-(B+C)$

$=180°-(45°+120°)$

$=15°$

〈答〉 $C=60°$，$A=75°$　または　$C=120°$，$A=15°$

問3　△ABC において，$a=2\sqrt{2}$，$b=2$，$A=135°$ のとき，B，C を求めよ。

正弦定理により，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ であるから

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\sin 135°}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

したがって，$B=30°$ または　$B=150°$

ここで，$B<180°-A=45°$ であるから

$B=30°$

$C=180°-(A+B)=180°-(135°+30°)=15°$

問4　△ABC において，$b=6$，$c=2\sqrt{3}$，$C=30°$ のとき，A，B，a を求めよ。

正弦定理により，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ であるから

$$\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{6\sin 30°}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって　$B=60°$　または　$B=120°$

$B=60°$ のとき　$A=180°-(60°+30°)=90°$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ より

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}\sin 90°}{\sin 30°}=4\sqrt{3}$$

$B=120°$ のとき　$A=180°-(120°+30°)=30°$

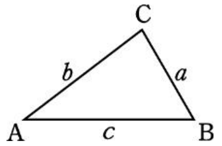
上と同様に $a=\frac{2\sqrt{3}\sin 90°}{\sin 30°}=2\sqrt{3}$

2　余弦定理　（教科書 p.142）

△ABC の 1 つの角と 3 辺の長さの間に次の（[1]　余弦定理　）が成り立つ。

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



証明　△ABC に対して右の図のように座標軸を定めると，3 頂点 A，B，C の座標は次のようになる。

A(0，0)，B(c，0)

C($b\cos A$，$b\sin A$)

また，CH ⊥ AB となるような x 軸上の点 H($b\cos A$，0) をとる。

直角三角形 BCH を考えて

$a^2 = \mathrm{BC}^2 = \mathrm{HB}^2 + \mathrm{HC}^2$

である。点 H の位置に応じて

$\mathrm{HB} = c - b\cos A$

または　$\mathrm{HB} = b\cos A - c$

が成り立つ。

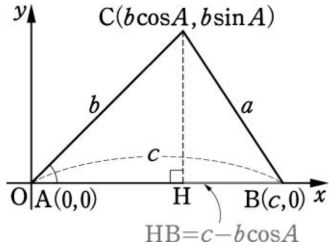
いずれの場合も

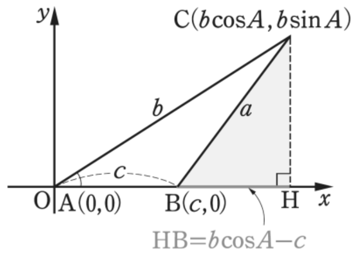
$a^2 = (c - b\cos A)^2 + (b\sin A)^2$

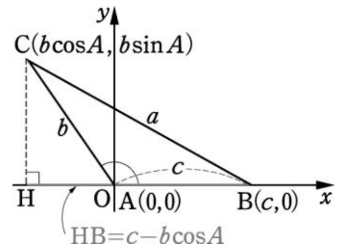
$= c^2 - 2bc\cos A + b^2(\cos^2 A + \sin^2 A)$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

同様にして，他の 2 つの式も得られる。







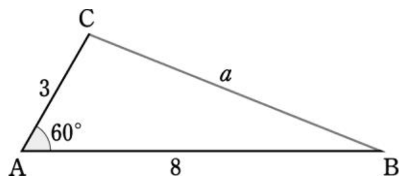
例 1　△ABC において，$b = 3$，$c = 8$，$A = 60°$ ならば，余弦定理により

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$= 3^2 + 8^2 - 2\cdot 3\cdot 8\cos 60°$

$= 9 + 64 - 24 = 49$

$a > 0$ より　$a = \sqrt{49} = 7$



問5　△ABC において，$a = 1$，$b = \sqrt{3}$，$C = 150°$ のとき，c を求めよ。

余弦定理により

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$= 1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\cdot 1\cdot \sqrt{3}\cos 150°$

$= 1 + 3 - 2\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7$

$c > 0$ より　$c = \sqrt{7}$

例題 3　△ABC において，$b = \sqrt{7}$，$c = 3$，$B = 60°$ のとき，a を求めよ。

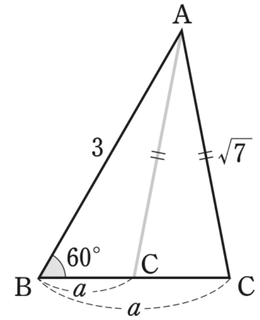
解　余弦定理により，$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ であるから

$(\sqrt{7})^2 = 3^2 + a^2 - 2\cdot 3\cdot a\cos 60°$

よって　$a^2 - 3a + 2 = 0$

$(a - 1)(a - 2) = 0$

ゆえに　$a = 1,\ 2$



問6　△ABC において，$a = \sqrt{7}$，$b = 1$，$A = 120°$ のとき，c を求めよ。

余弦定理により

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$　であるから

$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + c^2 - 2\cdot 1\cdot c\cos 120°$

よって　$c^2 + c - 6 = 0$

$(c + 3)(c - 2) = 0$

$c > 0$ より　$c = 2$

余弦定理を変形すると，次の式が得られる。

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

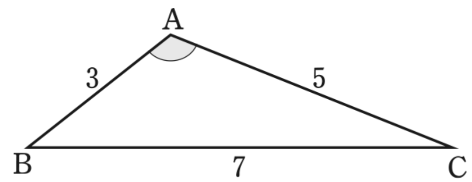
よって，三角形の 3 辺の長さから，角の大きさを求めることができる。

例 2　△ABC において，$a = 7$，$b = 5$，$c = 3$ ならば，余弦定理により

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$= \frac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 3} = -\frac{1}{2}$

ゆえに　$A = 120°$



問7　△ABC において，$a = 5$，$b = 8$，$c = 7$ のとき，C を求めよ。

余弦定理により

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 8} = \frac{1}{2}$

よって　$c = 60°$

三角形の辺と角の大きさ

（教科書 p.144）

△ABC において，余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

であるから，$\cos A$ の値の符号と，$b^2+c^2-a^2$ の値の符号は一致する。

したがって，次のことがわかる。

$a^2 < b^2 + c^2 \iff A < 90^\circ$

$a^2 = b^2 + c^2 \iff A = 90^\circ$

$a^2 > b^2 + c^2 \iff A > 90^\circ$

問8 次の△ABC において，A は鋭角，直角，鈍角のいずれであるか。

(1) $a = 11$，$b = 8$，$c = 7$

$a^2 = 121$，$b^2 + c^2 = 113$ であるから

$a^2 > b^2 + c^2$

よって，A は鈍角である。

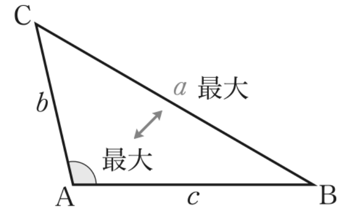
(2) $a = 7$，$b = 5$，$c = 6$

$a^2 = 49$，$b^2 + c^2 = 61$ であるから

$a^2 < b^2 + c^2$

よって，A は鋭角である。

三角形において，角の大小と対辺の大小は一致することが知られている。とくに，最大辺の対角が最大角である。



すべての角が鋭角である三角形を（[2] 鋭角三角形 ）といい，ある角が鈍角である三角形を（[3] 鈍角三角形 ）という。

例3 $a = 7$，$b = 6$，$c = 4$ のとき，△ABC は鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるかを調べてみよう。

最大辺が a であるから，その対角 A が最大角である。

ここで　$a^2 = 7^2 = 49$，$b^2 + c^2 = 6^2 + 4^2 = 52$

よって　$a^2 < b^2 + c^2$

したがって　$A < 90^\circ$

最大角 A が鋭角であるから，△ABC は鋭角三角形である。

問9 $a = 4$，$b = 8$，$c = 9$ のとき，△ABC は鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるか。

最大辺が c であるから，その対角 C が最大角である。

ここで　$c^2 = 9^2 = 81$，$a^2 + b^2 = 4^2 + 8^2 = 80$

よって　$c^2 > a^2 + b^2$

したがって　$C > 90^\circ$

最大角 C が鈍角であるから，△ABC は鈍角三角形である。

三角形の決定

（教科書 p.145）

例題 4 △ABC において，$b=2$，$c=1+\sqrt{3}$，$A=30°$ のとき，a，B，C を求めよ。

解 余弦定理により

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

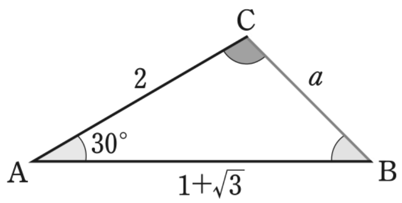
$=2^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})\cos 30°$

$=4+(4+2\sqrt{3})-2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$

$=2$

$a>0$ より　$a=\sqrt{2}$　……答

◀ 2辺とその間の角から角の対辺を求めるとき，余弦定理を利用



また，正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

より

$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{2\sin 30°}{\sqrt{2}}=2\cdot\dfrac{1}{2}\div\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

B の対辺 b は最大辺ではないから，B は最大角ではない。

よって，B は鋭角であるから

$B=45°$　……答

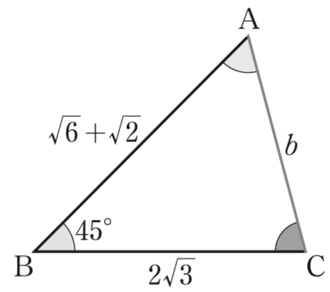
したがって

$C=180°-(30°+45°)=105°$　……答

問 10 △ABC において

$a=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$B=45°$

のとき，b，A，C を求めよ。



余弦定理により

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos 45°$

$=(8+4\sqrt{3})+12-2\sqrt{6}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$=8$

$b>0$ より　$a=2\sqrt{2}$

また，正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$　より

$\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{2\sqrt{3}\sin 45°}{2\sqrt{2}}$

$=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div 2\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ここで，$2\sqrt{3}<\sqrt{6}+\sqrt{2}$ より，A の対辺 a は最大辺ではないから，A は最大角ではない。

よって，A は鋭角であるから　$A=60°$

したがって　$C=180°-(60°+45°)=75°$

3 三角形の面積

（教科書 p.146）

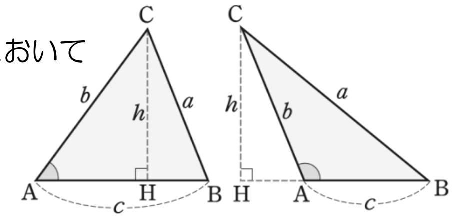
△ ABC の面積 S を，2 辺とその間の角によって表してみよう。

△ ABC の辺 AB から頂点 C までの高さを h とすると，右の図において

$h=b\sin A$

したがって

$S=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}bc\sin A$



他の 2 辺とその間の角からも，同様の公式が得られる。

三角形の面積
$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C}$

問 11 次の △ ABC の面積 S を求めよ。

(1) $b=2$，$c=5$，$A=60°$

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5\sin 60°=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(2) $a=7$，$b=4$，$C=135°$

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 4\sin 135°=7\sqrt{2}$

例題 5 $a=13$，$b=14$，$c=15$ である △ ABC の面積 S を求めよ。

解 余弦定理により

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{14^2+15^2-13^2}{2\cdot 14\cdot 15}=\frac{3}{5}$

よって　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$　◀ $\sin A>0$

ゆえに，三角形の面積の公式により

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 15\cdot\frac{4}{5}=84$

問 12 $a=13$，$b=8$，$c=7$ である △ ABC の面積 S を求めよ。

余弦定理により

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{8^2+7^2-13^2}{2\cdot 8\cdot 7}=-\frac{1}{2}$

よって　$A=120°$

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7\sin 120°=14\sqrt{3}$

円に内接する四角形

（教科書 p.147）

応用例題 6

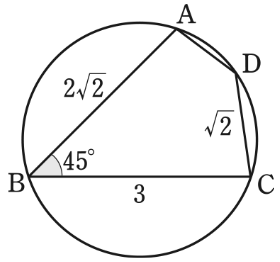
円に内接する四角形 ABCD において

$AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 3$, $CD = \sqrt{2}$,

$\angle ABC = 45°$

とするとき，AD を求めよ。

また，四角形 ABCD の面積 S を求めよ。



解　対角線 AC を引き，△ABC に余弦定理を用いると

$AC^2 = (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\cos 45°$

$= 8 + 9 - 12 = 5$

$AC > 0$ より　　$AC = \sqrt{5}$

四角形 ABCD は円に内接するから　$D = 180° - 45° = 135°$

$AD = x$ として，△ACD に余弦定理を用いると

$(\sqrt{5})^2 = x^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{2}\cos 135°$

すなわち　　$x^2 + 2x - 3 = 0$

これを解いて　　$x = 1,\ -3$

$x > 0$ より　　$AD = 1$　……答

また　$S = \triangle ABC + \triangle ACD$

$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sin 45° + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2}\sin 135°$

$= \frac{7}{2}$　……答

問 13　円に内接する四角形 ABCD において，$AB = 5$，$BC = 4$，$CD = 4$，$\angle ABC = 60°$ とするとき，AD を求めよ。

また，四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

対角線 AC を引き，△ABC に余弦定理を用いると

$AC^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4\cos 60°$

$= 21$

$AC > 0$ より　$AC = \sqrt{21}$

四角形 ABCD は円に内接するから

$D = 180° - 60° = 120°$

$AD = x$ として，△ACD に余弦定理を用いると

$(\sqrt{21})^2 = x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4\cos 120°$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

これを解いて　$x = 1,\ -5$

$x > 0$ より　$x = 1$

よって　$AD = 1$

また

$S = \triangle ABC + \triangle ACD$

$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4\sin 60° + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1\sin 120°$

$= 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

三角形の内接円の半径と面積

（教科書 p.148）

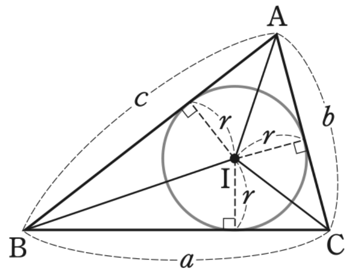
△ABC の 3 辺 AB，BC，CA のすべてに接する円はただ 1 つ存在する。

これを △ABC の（[1] 内接円 ）という。

△ABC の内接円の半径を r，中心を I とすると，△ABC の面積 S は

$$S = \triangle \mathrm{IBC} + \triangle \mathrm{ICA} + \triangle \mathrm{IAB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$

すなわち　$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$



例題 7　3 辺の長さが $a=3$，$b=7$，$c=8$ である △ABC がある。このとき，次の問に答えよ。

(1)　△ABC の面積 S を求めよ。

(2)　△ABC の内接円の半径 r を求めよ。

解　(1)　余弦定理により

$$\cos A = \frac{7^2+8^2-3^2}{2\cdot 7\cdot 8} = \frac{13}{14}$$

よって　$\sin A = \sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$

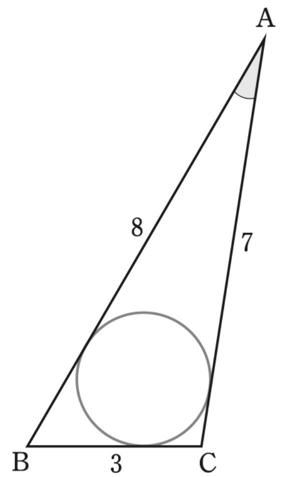
ゆえに，求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\sin A = 6\sqrt{3}$$

(2)　$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ より

$$6\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot r\cdot(3+7+8)$$

ゆえに，求める半径 r は $r = \frac{6\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



問 14　$a=7$，$b=6$，$c=5$ である △ABC の内接円の半径 r を求めよ。

余弦定理により

$$\cos A = \frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot 6\cdot 5} = \frac{1}{5}$$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

△ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\sin A = 6\sqrt{6}$$

一方，△ABC の内接円の半径を r とすると，

$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ より

$6\sqrt{6} = \frac{1}{2}\cdot r\cdot(7+6+5)$

$$r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

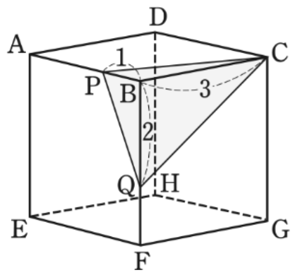
4 空間図形の計量

（教科書 p.149）

例題 8 1 辺の長さが 3 の立方体 ABCD − EFGH の辺 AB 上に点 P，辺 BF 上に点 Q を

$BP = 1,\ BQ = 2$

となるようにとる。このとき，△CPQ の面積 S を求めよ。



解 △CPQ の 3 辺の長さは

$PQ = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$CP = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$CQ = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

である。$\angle CPQ = \theta$ とおくと，余弦定理により

$$\cos\theta = \frac{CP^2 + PQ^2 - CQ^2}{2 \cdot CP \cdot PQ} = \frac{10+5-13}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

よって $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

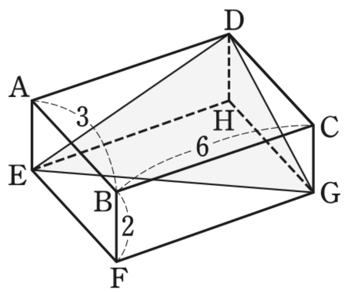
ゆえに，求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot CP \cdot PQ \cdot \sin\theta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{2}$$

問 15 右の図の直方体 ABCD − EFGH において

$AB = 3,\ BC = 6,\ BF = 2$

である。このとき，△DEG の面積 S を求めよ。



△DEG の 3 辺の長さは

$DE = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$

$EG = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$

$GD = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

である。$\angle DEG = \theta$ とおくと，余弦定理により

$$\cos\theta = \frac{\left(2\sqrt{10}\right)^2 + \left(3\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{13}\right)^2}{2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

よって $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2}$

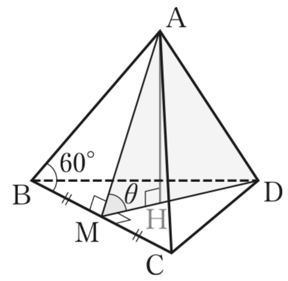
$$= \frac{\sqrt{7}}{5}$$

ゆえに，求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot EG \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{7}}{5} = 3\sqrt{14}$$

応用例題 9 1 辺の長さが a の正四面体 ABCD において，辺 BC の中点を M とし，頂点 A から DM に下ろした垂線を AH とする。
$\angle\mathrm{AMD}=\theta$ とするとき，次の問に答えよ。
(1)　$\cos\theta$ の値を求めよ。
(2)　AH の長さを a で表せ。



解 (1)　AM および DM の長さを求める。
M は正三角形 ABC の辺 BC の中点であるから

$$\angle\mathrm{ABM}=60^\circ,\ \angle\mathrm{AMB}=90^\circ$$

よって　$\mathrm{AM}=a\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

同様に　$\mathrm{DM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

△AMD に対して余弦定理を用いると，$\cos\theta$ の値は

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AM}^2+\mathrm{DM}^2-\mathrm{AD}^2}{2\cdot\mathrm{AM}\cdot\mathrm{DM}}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-a^2}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)}=\frac{1}{3}$$

(2)　(1)で得られた $\cos\theta$ の値から $\sin\theta$ の値を求めると

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AM}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

問 16 例題 9 において，正四面体 ABCD の体積 V を a で表せ。

△BCD の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$，$\mathrm{DM}\perp\mathrm{BC}$ より
　平面 $\mathrm{ADM}\perp\mathrm{BC}$
よって　$\mathrm{AH}\perp\mathrm{BC}$
これと，$\mathrm{AH}\perp\mathrm{DM}$ より平面 $\mathrm{BCD}\perp\mathrm{AH}$ となり，AH は正四面体の高さを表す。

例題9より　$\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

よって

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot\mathrm{AH}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

〔別解〕例題 9 の結果を用いると，△AMD の面積は

$$\triangle\mathrm{AMD}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DM}\cdot\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{2}}{4}a^2$$

また，正四面体 ABCD の体積は，△AMD を底面とする高さが BM および CM の 2 つの三角錐の体積の和として表される。
したがって

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{AMD}\cdot\mathrm{BM}+\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{AMD}\cdot\mathrm{CM}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{AMD}\cdot(\mathrm{BM}+\mathrm{CM})$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}a^2\cdot a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

問 題

（教科書 p.151）

11 △ABC において，$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$ であるとき，3 辺 a，b，c の間に成り立つ関係式を答えよ。
また，△ABC はどのような三角形か。

△ABC の外接円の半径を R とおくと，正弦定理により

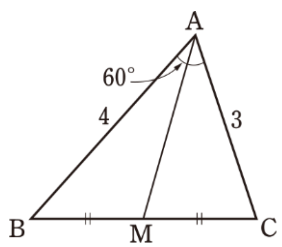
$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$

これらを　$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$　に代入すると

$\frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}=\frac{c^2}{4R^2}$

ゆえに，3 辺 a，b，c の間には，等式　$a^2+b^2=c^2$　が成り立つ。
よって，△ABC は $C=90°$ の直角三角形である。

12 △ABC において，AB = 4，AC = 3，A = 60° とし，辺 BC の中点を M とする。
このとき，次の値を求めよ。



(1)　BC

余弦定理により

$BC^2=4^2+3^2-2\cdot4\cdot3\cos60°=13$

$BC>0$ より　$BC=\sqrt{13}$

(2)　$\cos B$

余弦定理により

$\cos B=\frac{4^2+(\sqrt{13})^2-3^2}{2\cdot4\cdot\sqrt{13}}$

$=\frac{20}{8\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{26}$

(3)　AM

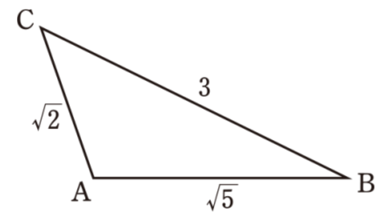
△ABM に余弦定理を用いると

$AM^2=4^2+\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2-2\cdot4\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{5\sqrt{13}}{26}$

$=\frac{37}{4}$

$AM>0$ より　$AM=\frac{\sqrt{37}}{2}$

13 △ABC において，その面積を S とするとき，次の問に答えよ。



(1)　$a=3$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{5}$ のとき，C，S を求めよ。

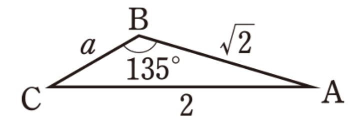
余弦定理により

$\cos C=\frac{3^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$C=45°$

$S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{2}\sin45°=\frac{3}{2}$

(2)　$c=\sqrt{2}$，$b=2$，$B=135°$ のとき，C，a，S を求めよ。



正弦定理により

$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$

ゆえに

$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\sqrt{2}\sin135°}{2}=\frac{1}{2}$

C は鋭角であるから　$C=30°$

余弦定理により

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$2^2=(\sqrt{2})^2+a^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot a\cos135°$

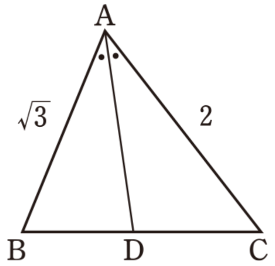
$a^2+2a-2=0$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{3}-1$

$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\sin135°$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

14 △ABC において，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=2$，$A=60°$ とし，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とする。このとき，次の問に答えよ。



(1)　△ABC の面積 S を求めよ。

$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot2\sin60°$

$=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$

(2)　AD を求めよ。

$\mathrm{AD}=x$ とおくと

△ABD ＋△ACD ＝△ABC であるから

$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin30°+\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\sin30°=\frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot x\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

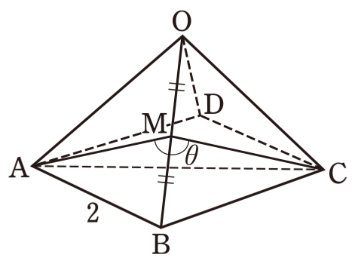
$\frac{\sqrt{3}+2}{4}x=\frac{3}{2}$

$x=\frac{6}{\sqrt{3}+2}$

$=12-6\sqrt{3}$

よって　$\mathrm{AD}=12-6\sqrt{3}$

15 1 辺の長さが 2 の正方形 ABCD を底面とし，4 個の正三角形を側面とする正四角錐 OABCD がある。辺 OB の中点を M，$\angle\mathrm{AMC}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。



△ABM は，$\angle\mathrm{AMB}=90°$，$\angle\mathrm{ABM}=60°$ の直角三角形であるから

$\mathrm{AM}=\mathrm{AB}\sin60°=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

同様に　$\mathrm{CM}=\sqrt{3}$

また，四角形 ABCD は 1 辺が 2 の正方形であるから

$\mathrm{AC}^2=2^2+2^2=8$

$\mathrm{AC}>0$ より　$\mathrm{AC}=2\sqrt{2}$

よって，余弦定理により

$\cos\theta=\frac{\mathrm{AM}^2+\mathrm{CM}^2-\mathrm{AC}^2}{2\cdot\mathrm{AM}\cdot\mathrm{CM}}=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}$

発展　三角形の形状

（教科書 p.152）

三角形において，与えられた辺や角の三角比の等式から，その三角形がどのような形であるかを求めてみよう。

例題 1　△ABC において，次の等式が成り立つとき，この三角形はどのような形の三角形か。

$\sin A\cos B = \sin C$

解　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$\sin A = \frac{a}{2R}$，$\sin C = \frac{c}{2R}$

余弦定理により

$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

これらを与えられた等式に代入すると

$\frac{a}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{c}{2R}$

両辺に $4cR$ を掛けると

$c^2 + a^2 - b^2 = 2c^2$

よって

$a^2 = b^2 + c^2$

したがって，△ABC は $A = 90°$ の直角三角形である。

問1　△ABC おいて，次の等式が成り立つとき，この三角形はどのような形の三角形か。

(1)　$a\sin A = b\ \sin B$

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$\sin A = \frac{a}{2R}$，$\sin B = \frac{b}{2R}$　　……①

①を与えられた等式に代入すると

$a\cdot\frac{a}{2R} = b\cdot\frac{b}{2R}$

すなわち　$a^2 = b^2$

$a > 0$，$b > 0$ より　$a = b$

よって，△ABC は AC = BC の二等辺三角形である。

(2)　$a\cos A + b\cos B = c\cos C$

△ABC について，余弦定理を用いると

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

これらを与えられた等式に代入すると

$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

両辺に $2abc$ を掛けて

$$a^2(b^2+c^2-a^2) + b^2(c^2+a^2-b^2) = c^2(a^2+b^2-c^2)$$

$$c^4 - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = 0$$

$$c^4 - (a^2-b^2)^2 = 0$$

$$(c^2-a^2+b^2)(c^2+a^2-b^2) = 0$$

よって　$a^2 = b^2 + c^2$ または　$b^2 = c^2 + a^2$

したがって，△ABC は $\angle A = 90°$ の直角三角形　または　$\angle B = 90°$ の直角三角形である。

発展　ヘロンの公式

（教科書 p.153）

3 辺 a，b，c が与えられたときの △ABC の面積 S を求めてみよう。

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$ の両辺を 2 倍してから 2 乗すると

$$
\begin{aligned}
4S^2 &= b^2c^2\sin^2 A \\
&= b^2c^2(1-\cos^2 A) \\
&= b^2c^2(1+\cos A)(1-\cos A) \quad \cdots\cdots①
\end{aligned}
$$

余弦定理により　$1+\cos A = 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$

$$=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}$$

同様にして　$1-\cos A=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$

ここで，$a+b+c=2s$ とおくと

$-a+b+c=2(s-a)$，$a-b+c=2(s-b)$，$a+b-c=2(s-c)$

よって　$1+\cos A=\frac{2s(s-a)}{bc}$，$1-\cos A=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc}$

これらを①に代入して　$4S^2=4s(s-a)(s-b)(s-c)$

したがって　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ヘロンの公式
$\boldsymbol{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$　　ただし，$\boldsymbol{s=\frac{a+b+c}{2}}$

例 1　3 辺の長さが 4，5，7 である三角形の面積 S を求めてみよう。

ヘロンの公式により，$s=\frac{4+5+7}{2}=8$ であるから

$S=\sqrt{8\cdot 4\cdot 3\cdot 1}=4\sqrt{6}$

問1　3 辺の長さが 5，6，9 である三角形の面積 S を求めよ。

ヘロンの公式により，$s=\frac{5+6+9}{2}=10$ であるから

$S=\sqrt{10\cdot(10-5)\cdot(10-6)\cdot(10-9)}$

$=10\sqrt{2}$