

2 節 円

1 円の方程式

(教科書 p.81)

円の方程式

点 (a, b) を中心とする半径 r の円の方程式は

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

とくに、原点を中心とする半径 r の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = r^2$$

問1 点 $(2, -1)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円の方程式を求めよ。

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3$$

例1 点 $A(3, -1)$ を中心とし、原点 O を通る円の方程式を求めよう。

この円の半径は $OA = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

したがって、この円の方程式は $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$

問2 点 $(-2, 3)$ を中心とし、原点を通る円の方程式を求めよ。

この円の半径は $\sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ であるから

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$$

問3 2点 $A(-1, -2)$, $B(7, 4)$ を直径の両端とする円について、次のものを求めよ。

(1) 円の中心の座標

$$\frac{-1+7}{2} = 3, \quad \frac{-2+4}{2} = 1 \text{ より}$$

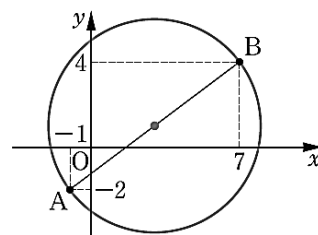
$$(3, 1)$$

(2) 円の方程式

(1)より、中心は 点 $(3, 1)$

半径は $\sqrt{(7-3)^2 + (4-1)^2} = 5$

ゆえに $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$



$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ の表す図形

(教科書 p.82)

円の方程式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

の左辺を展開して整理すると

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

となる。この式は、 l, m, n を定数として

$$(\textcircled{1} \quad x^2 + y^2 + lx + my + n = 0)$$

の形である。

例2 方程式 $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 2 = 0$ で表される図形について考えてみよう。この方程式を変形すると

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 8y) = 2$$

◀ x を含む項, y を含む項に整理

$$(x - 1)^2 - 1^2 + (y - 4)^2 - 4^2 = 2$$

◀ 平方完成する

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 19$$

よって、この方程式は点 $(1, 4)$ を中心とする半径 $\sqrt{19}$ の円を表す。

問4 次の方程式はどのような図形を表すか。

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0 \text{ より}$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

ゆえに、点 $(3, -2)$ を中心とする半径 3 の円を表す。

$$(2) \quad x^2 + y^2 + 5y + 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 5y + 2 = 0 \text{ より}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

ゆえに、点 $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{\sqrt{17}}{2}$ の円を表す。

$$(3) \quad x^2 + y^2 + 4x - 10y + 29 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 29 = 0 \text{ より}$$

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 0$$

ゆえに、1点 $(-2, 5)$ を表す。

問5 方程式 $x^2 + y^2 + x - 3y + n = 0$ が円を表すような定数 n の値の範囲を求めよ。

$$x^2 + y^2 + x - 3y + n = 0 \text{ より}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} - n$$

この方程式が円を表すための条件は

$$\frac{5}{2} - n > 0$$

$$\text{ゆえに } n < \frac{5}{2}$$

例題 3点 $A(-7, 5)$, $B(-3, 7)$, $C(0, -2)$ を通る円の方程式を求めよ。

1

解 求める円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とおく。

これが点 $A(-7, 5)$ を通るから

$$(-7)^2 + 5^2 - 7l + 5m + n = 0$$

すなわち

$$-7l + 5m + n + 74 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

同様に、点 B, C を通るから

$$(-3)^2 + 7^2 - 3l + 7m + n = 0$$

$$0^2 + (-2)^2 - 2m + n = 0$$

すなわち

$$-3l + 7m + n + 58 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

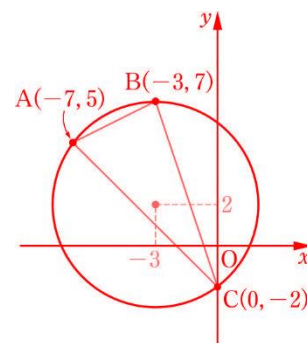
$$-2m + n + 4 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

$$l = 6, m = -4, n = -12$$

よって、求める円の方程式は

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$$



問6 3点 $A(6, 2)$, $B(2, -4)$, $C(7, -3)$ がある。このとき、次の問に答えよ。

(1) 3点 A, B, C を通る円の方程式を求めよ。

求める円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とおく。

これが3点 $A(6, 2)$, $B(2, -4)$, $C(7, -3)$ を通るから

$$6^2 + 2^2 + 6l + 2m + n = 0$$

$$2^2 + (-4)^2 + 2l - 4m + n = 0$$

$$7^2 + (-3)^2 + 7l - 3m + n = 0$$

すなわち

$$6l + 2m + n + 40 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2l - 4m + n + 20 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$7l - 3m + n + 58 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より $l = -8, m = 2, n = 4$

よって、求める円の方程式は

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 4 = 0$$

(2) $\triangle ABC$ の外心の座標と、外接円の半径を求めよ。

(1) で求めた方程式を変形すると

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 13$$

ゆえに、外心の座標は $(4, -1)$

外接円の半径は $\sqrt{13}$

例題1で求めた円は、3点 A, B, C を頂点とする $\triangle ABC$ の外接円である。一般に、三角形の外接円の中心をその三角形の (② 外心) という。

2 円と直線

円と直線の共有点

(教科書 p.84)

例 3 直線 $y = -x + 1$ と円 $x^2 + y^2 = 25$ の共有点の座標を求めてみよう。共有点の座標は次の連立方程式の実数解として得られる。

$$\begin{cases} y = -x + 1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 = 25 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①を②に代入すると

$$x^2 + (-x + 1)^2 = 25$$

整理すると

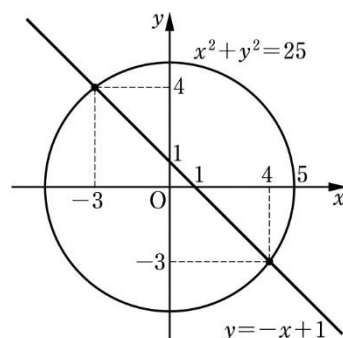
$$x^2 - x - 12 = 0$$

これを解くと $x = 4, -3$

①より, $x = (4)$ のとき $y = (-3)$

$x = (-3)$ のとき $y = (4)$

よって, 共有点の座標は $(4, -3)$, $(-3, 4)$ である。



問 7 円 $x^2 + y^2 = 10$ と次の直線の共有点の座標を求めよ。

(1) $2x + y - 5 = 0$

$2x + y - 5 = 0$ より $y = -2x + 5$

これを, $x^2 + y^2 = 10$ に代入して

$$x^2 + (-2x + 5)^2 = 10$$

整理すると $x^2 - 4x + 3 = 0$

よって $x = 1, 3$

$x = 1$ のとき $y = 3$

$x = 3$ のとき $y = -1$

ゆえに, 共有点の座標は $(1, 3), (3, -1)$

(2) $x - 3y + 10 = 0$

$x - 3y + 10 = 0$ より $x = 3y - 10$

これを, $x^2 + y^2 = 10$ に代入して

$$(3y - 10)^2 + y^2 = 10$$

整理すると $y^2 - 6y + 9 = 0$

よって $y = 3$

このとき $x = -1$

ゆえに, 共有点の座標は $(-1, 3)$

円と直線の共有点の個数は, 判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号によって次のようになる。

円と直線の共有点

$D > 0 \iff$ 円と直線の共有点は 2 個

$D = 0 \iff$ 円と直線の共有点は 1 個

$D < 0 \iff$ 円と直線の共有点はない

例 4 (1) 円 $x^2 + y^2 = 7$ と直線 $y = x - 1$ の共有点の個数を求めてみよう。この 2 式を連立させて y を消去すると

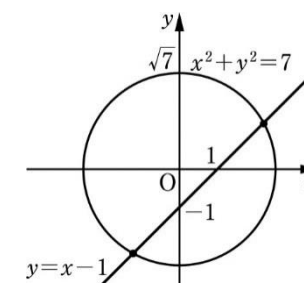
$$x^2 + (x - 1)^2 = 7$$

すなわち $x^2 - x - 3 = 0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 13 > 0$$

であるから, この円と直線の共有点は (2) 個ある。



(2) 円 $x^2 + y^2 = 8$ と直線 $y = x - 4$ の共有点の個数を求めてみよう。この 2 式を連立させて y を消去すると

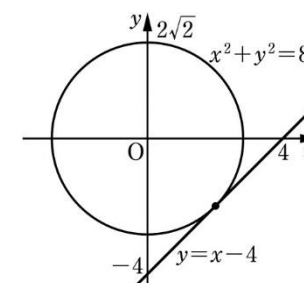
$$x^2 + (x - 4)^2 = 8$$

すなわち $x^2 - 4x + 4 = 0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \cdot 4 = 0$$

であるから, この円と直線の共有点は (1) 個ある。



例 4 (2) のように, 円と直線がただ 1 つの共有点をもつとき, 円と直線は (3) 接する といいい, その直線を (4) 接線, 共有点を (5) 接点 という。

問8 次の円と直線の共有点の個数を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 = 13$, $y = -x + 1$

2式を連立させて y を消去すると

$$x^2 + (-x + 1)^2 = 13$$

すなわち $x^2 - x - 6 = 0$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$$

ゆえに、共有点は **2 個** ある。

(2) $x^2 + y^2 = 5$, $y = 2x + 5$

2式を連立させて y を消去すると

$$x^2 + (2x + 5)^2 = 5$$

すなわち $x^2 + 4x + 4 = 0$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 1 \cdot 4 = 0$$

ゆえに、共有点は **1 個** ある。

(3) $x^2 + y^2 = 4$, $y = x + 3$

2式を連立させて y を消去すると

$$x^2 + (x + 3)^2 = 4$$

すなわち $2x^2 + 6x + 5 = 0$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 3^2 - 2 \cdot 5 = -1 < 0$$

ゆえに、共有点は**ない**(0 個)。

**応用
例題**

2

解 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y = 2x + k & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

において、②を①に代入すると

$$x^2 + (2x + k)^2 = 1$$

すなわち

$$5x^2 + 4kx + k^2 - 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

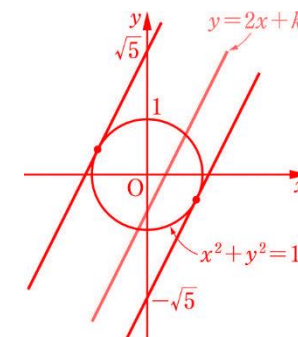
この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 5 \cdot (k^2 - 1) = 5 - k^2$$

2次方程式③が実数解をもつ条件は、 $\frac{D}{4} \geq 0$ であるから

$$5 - k^2 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad (k + \sqrt{5})(k - \sqrt{5}) \leq 0$$

したがって $-\sqrt{5} \leq k \leq \sqrt{5}$



問9 直線 $y = 3x + k$ が円 $x^2 + y^2 = 4$ と共有点をもたないように、定数 k の値の範囲を定めよ。

2式を連立させて y を消去すると

$$x^2 + (3x + k)^2 = 4$$

すなわち $10x^2 + 6kx + k^2 - 4 = 0$

この2次方程式の判別式を D とすると、求める条件は

$$\frac{D}{4} = (3k)^2 - 10(k^2 - 4)$$

$$= -k^2 + 40 < 0$$

ゆえに $k < -2\sqrt{10}$, $2\sqrt{10} < k$

例 5 前ページの例題 2 は次のようにも考えられる。円の中心 $(0, 0)$ と直線 $2x - y + k = 0$ の距離を d とすると、円の半径は 1 であるから、 $d \leq 1$ のとき、円と直線

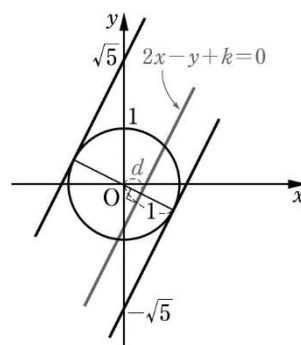
は共有点をもつ。

77 ページで学んだ点と直線の距離の公式により

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

$$d \leq 1 \text{ より } \frac{|k|}{\sqrt{5}} \leq 1 \quad \text{すなわち} \quad |k| \leq \sqrt{5}$$

$$\text{したがって} \quad -\sqrt{5} \leq k \leq \sqrt{5}$$



問 11 円 $x^2 + y^2 = 8$ と直線 $y = -2x + 5$ の 2 つの交点を結ぶ線分の長さ l を求めよ。

円の中心 $(0, 0)$ と直線 $2x + y - 5 = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|-5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$$

また、円の半径は $r = \sqrt{8}$ であるから、三平方の定理により

$$\frac{1}{2}l = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{8 - 5} = \sqrt{3}$$

ゆえに、求める線分の長さは $l = 2\sqrt{3}$

問 10 円 $x^2 + y^2 = 9$ と直線 $3x + 4y - k = 0$ が接するように、定数 k の値を定めよ。

円の中心 $(0, 0)$ と直線 $3x + 4y - k = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|-k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|k|}{5}$$

円の半径は 3 であるから、求める条件は

$$d = 3 \quad \text{すなわち} \quad \frac{|k|}{5} = 3$$

ゆえに $k = \pm 15$

弦の長さ

(教科書 p.87)

応用例題 円 $x^2 + y^2 = 2$ と直線 $x - y - 1 = 0$ の 2 つの交点を結ぶ線分の長さ l を求めよ。

3

解 円の中心 $(0, 0)$ と直線 $x - y - 1 = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|0 - 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

また、円の半径 r は $r = \sqrt{2}$

であるから、三平方の定理により

$$\frac{1}{2}l = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

ゆえに、求める線分の長さは $l = \sqrt{6}$

