円の接線

（教科書 p.88）

円の接線
円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\boldsymbol{x_1x+y_1y=r^2}$

問 12　次の円上の点 P における接線の方程式を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=25$，$\mathrm{P}(3,\ 4)$

$\boldsymbol{3x+4y=25}$

(2)　$x^2+y^2=9$，$\mathrm{P}(-1,\ 2\sqrt{2})$

$(-1)x+2\sqrt{2}y=9$

すなわち　$\boldsymbol{-x+2\sqrt{2}y=9}$

(3)　$x^2+y^2=16$，$\mathrm{P}(0,\ 4)$

$0x+4y=16$

すなわち　$\boldsymbol{y=4}$

(4)　$x^2+y^2=10$，$\mathrm{P}(-\sqrt{10},\ 0)$

$-\sqrt{10}x+0y=10$

すなわち　$\boldsymbol{x=-\sqrt{10}}$

(参考)　円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線は

$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

応用例題 4　点 $(7,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式を求めよ。

解　接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は

$x_1x+y_1y=25$　……①

これが点 $(7,\ 1)$ を通るから

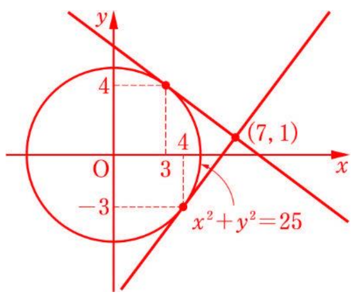
$7x_1+y_1=25$

これより

$y_1=-7x_1+25$　……②

また，$(x_1,\ y_1)$ は円上の点であるから

$x_1^2+y_1^2=25$　……③



②を③に代入すると

$x_1^2+(-7x_1+25)^2=25$

整理すると　$x_1^2-7x_1+12=0$

$(x_1-3)(x_1-4)=0$

これを解くと　$x_1=3,\ 4$

②より，$x_1=3$ のとき　$y_1=4$

$x_1=4$ のとき　$y_1=-3$

したがって，求める接線は 2 本あり，①よりその方程式は

$3x+4y=25$，　$4x-3y=25$

問 13　点 $(15,\ 5)$ を通り，円 $x^2+y^2=50$ に接する直線の方程式を求めよ。

接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は

$x_1x+y_1y=50$　……①

これが点 $(15,\ 5)$ を通るから

$15x_1+5y_1=50$

よって　$y_1=-3x_1+10$　……②

また，$(x_1,\ y_1)$ は円上の点であるから

${x_1}^2+{y_1}^2=50$　……③

②，③より　${x_1}^2+(-3x_1+10)^2=50$

よって　$x_1=1,\ 5$

②より　$x_1=1$ のとき　$y_1=7$

$x_1=5$ のとき　$y_1=-5$

求める接線は 2 本あり，①よりその方程式は

$\boldsymbol{x+7y=50,\ x-y=10}$

3 2つの円

2 つの円の位置関係

(教科書 p.90)

例 6 点 (2, 4) を中心とし，円 $x^2+y^2=45$ に内接する円の方程式を求めてみよう。円 $x^2+y^2=45$ は中心が原点，半径が $3\sqrt{5}$ の円である。

2 つの円の中心間の距離は

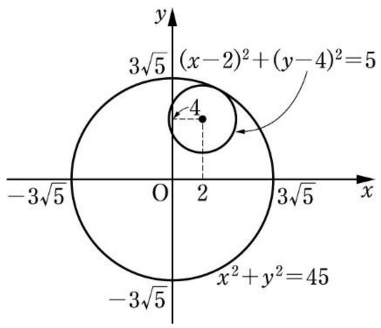
$\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

よって，求める円の半径は

$3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$

ゆえに，求める円の方程式は

$(x-2)^2+(y-4)^2=5$



問 14 点 (3, 4) を中心とし，円 $x^2+y^2=1$ に外接する円の方程式を求めよ。

2 つの円の中心間の距離は

$\sqrt{3^2+4^2}=5$

よって，求める円の半径は

$5-1=4$

ゆえに，求める円の方程式は

$\boldsymbol{(x-3)^2+(y-4)^2=16}$

2 つの円の共有点

(教科書 p.91)

応用例題 5 次の 2 つの円の共有点の座標を求めよ。

$x^2+y^2=10,\quad x^2+y^2-12x+6y+20=0$

考え方 2 つの方程式がともに x, y の 2 次の項を含むから，まず辺々引いて 1 次式を得る。

解 求める共有点の座標は次の連立方程式の実数解として得られる。

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2-12x+6y+20=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

① − ②より

$12x-6y-20=10$

すなわち

$y=2x-5\quad\cdots\cdots③$

③を①に代入すると

$x^2+(2x-5)^2=10$

整理すると

$x^2-4x+3=0$

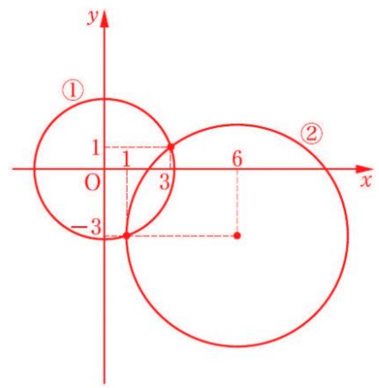
これを解くと　$x=1,\ 3$

③より

$x=1$のとき　$y=-3$

$x=3$のとき　$y=1$

よって，共有点の座標は　$(1,\ -3)$, $(3,\ 1)$



問 15 次の 2 つの円の共有点の座標を求めよ。

$x^2+y^2=5,\qquad x^2+y^2-12x+4y+15=0$

$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots① \\ x^2+y^2-12x+4y+15=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

① − ②より

$12x-4y-15=5$

すなわち

$y=3x-5$ ……③

③を①に代入すると

$x^2+(3x-5)^2=5$

整理すると

$x^2-3x+2=0$

これを解くと　$x=1,\ 2$

③より　$x=1$ のとき　$y=-2$

$x=2$ のとき　$y=1$

よって，共有点の座標は

$\mathbf{(1,\ -2),\ (2,\ 1)}$

2 つの円の交点を通る円

（教科書 p.92）

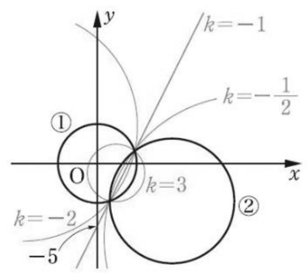
前ページの例題 5 のように，2 つの円

$x^2+y^2-10=0$ ……①

$x^2+y^2-12x+6y+20=0$ ……②

は，2 点 $(1,\ -3)$，$(3,\ 1)$ で交わる。

2 つの円①，②に対し，k を定数として，次の方程式を考える。



（⑥　$k(x^2+y^2-10)+(x^2+y^2-12x+6y+20)=0$　） ……③

$x=1,\ y=-3$ および $x=3,\ y=1$ が③を満たすから，2 点 $(1,\ -3)$，$(3,\ 1)$ は③で表される図形上にある。

また，③を変形すると

$(k+1)x^2+(k+1)y^2-12x+6y+(-10k+20)=0$

となる。したがって

$k\neq-1$ のとき，③は 2 つの円①，②の交点を通る円を表し，

$k=-1$ のとき，③は 2 つの円①，②の交点を通る直線を表す。

応用例題 6 2 つの円 $x^2+y^2-1=0$，$x^2+y^2-4x-4y+3=0$ の交点と原点 O を通る円の方程式を求めよ。

k を定数として，2 つの円の交点を通る円の方程式を

$k(x^2+y^2-1)+(x^2+y^2-4x-4y+3)=0$ ……①

とおく。①に原点 O の座標 $x=0,\ y=0$ を代入すると

$-k+3=0$ より　$k=3$

これを①に代入して整理すると，求める円の方程式は

$x^2+y^2-x-y=0$

問 16 2 つの円 $x^2+y^2-4=0$，$x^2+y^2-6x+2y=0$ の交点と点 $(2,\ 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

2 つの円の交点を通る円は，k を定数として

$k(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-6x+2y)=0$ ……①

とおくことができる。

①に $x=2,\ y=1$ を代入して

$k-5=0$

よって　$k=5$

これを①に代入して

$5(x^2+y^2-4)+(x^2+y^2-6x+2y)=0$

$6x^2+6y^2-6x+2y-20=0$

ゆえに　$\mathbf{x^2+y^2-x+\frac{1}{3}y-\frac{10}{3}=0}$

問 題

（教科書 p.93）

9 次の円の方程式を求めよ。

(1) 中心が $(-4,\ 3)$ で，y 軸に接する円

求める円の半径は 4 であるから

$$(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})^{\mathbf{2}}+(\boldsymbol{y}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}=\mathbf{16}$$

(2) 点 $(-4,\ -5)$ を中心とし，直線 $x-2y=1$ に接する円

点 $(-4,\ -5)$ と直線 $x-2y-1=0$ の距離は

$$\frac{|-4-2\cdot(-5)-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$$

ゆえに　$(\boldsymbol{x}+\mathbf{4})^{\mathbf{2}}+(\boldsymbol{y}+\mathbf{5})^{\mathbf{2}}=\mathbf{5}$

(3) x 軸上に中心をもち，2 点 $(3,\ \sqrt{3})$，$(2,\ -2)$ を通る円

求める円の中心を $(a,\ 0)$ とすると，この点が 2 点 $(3,\ \sqrt{3})$，$(2,\ -2)$ から等距離にあるから

$$(a-3)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2=(a-2)^2+2^2$$

よって　$a=2$

すなわち，求める円の中心は $(2,\ 0)$ である。

また，求める円の半径は

$$\sqrt{(2-2)^2+2^2}=2$$

ゆえに，求める円の方程式は

$$(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}=\mathbf{4}$$

(4) 直線 $y=2x-5$ 上に中心をもち，2 点 $(4,\ 6)$，$(-2,\ 2)$ を通る円

求める円の中心を $(a,\ 2a-5)$ とすると，この点が 2 点 $(4,\ 6)$，$(-2,\ 2)$ から等距離にあるから

$$(a-4)^2+(2a-5-6)^2=(a+2)^2+(2a-5-2)^2$$

すなわち

$$(a-4)^2+(2a-11)^2=(a+2)^2+(2a-7)^2$$

整理して　$-52a+137=-24a+53$

よって　$a=3$

すなわち，求める円の中心は $(3,\ 1)$ である。

また，求める円の半径は

$$\sqrt{(4-3)^2+(6-1)^2}=\sqrt{26}$$

ゆえに，求める円の方程式は

$$(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}+(\boldsymbol{y}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}}=\mathbf{26}$$

１０ 方程式 $3x^2+3y^2-2x-3y+1=0$ は，どのような図形を表すか。

$3x^2+3y^2-2x-3y+1=0$ より

$$x^2+y^2-\frac{2}{3}x-y+\frac{1}{3}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{36}$$

ゆえに，**点 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{6}$ の円を表す。**

１１ 次の問に答えよ。

(1) 3 点 $(-3,\ 5)$, $(-2,\ 6)$, $(4,\ -2)$ を通る円の方程式を求めよ。

求める円の方程式を

$x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

これが 3 点 $(-3,\ 5)$, $(-2,\ 6)$, $(4,\ -2)$ を通るから

$(-3)^2+5^2-3l+5m+n=0$

$(-2)^2+6^2-2l+6m+n=0$

$4^2+(-2)^2+4l-2m+n=0$

すなわち

$-3l+5m+n+34=0$ ……①

$-2l+6m+n+40=0$ ……②

$4l-2m+n+20=0$ ……③

①，②，③より

$l=-2$, $m=-4$, $n=-20$

ゆえに，求める円の方程式は

$\boldsymbol{x^2+y^2-2x-4y-20=0}$

(2) (1)の円が点 $(5,\ a)$ を通るとき，a の値を求めよ。

(1)で求めた円が点 $(5,\ a)$ を通るから

$5^2+a^2-10-4a-20=0$

$a^2-4a-5=0$

ゆえに $\boldsymbol{a=-1,\ 5}$

１２ 直線 $y=mx-3$ が円 $x^2+y^2-2y=0$ と異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

$y=mx-3$ と $x^2+y^2-2y=0$ の 2 式から yを消去して

$x^2+(mx-3)^2-2(mx-3)=0$

$(m^2+1)x^2-8mx+15=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，異なる 2 点で交わるための条件は

$$\frac{D}{4}=(-4m)^2-(m^2+1)\cdot 15$$

$$=m^2-15>0$$

ゆえに $\boldsymbol{m<-\sqrt{15},\ \sqrt{15}<m}$

〔別解〕

$x^2+y^2-2y=0$ より $x^2+(y-1)^2=1$

よって，この円の中心は $(0,\ 1)$，半径は 1 である。円の中心と直線 $mx-y-3=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|0-1-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$$

したがって，求める条件は $d<1$

すなわち $4<\sqrt{m^2+1}$

ゆえに $m<-\sqrt{15},\ \sqrt{15}<m$

１３ 円 $x^2+y^2=4$ と点 P(3, 2) がある。このとき，次の問に答えよ。

(1) 点 P を通り，この円に接する直線の方程式と接点の座標を求めよ。

接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は

$x_1x+y_1y=4$

点 $\mathrm{P}(3,\ 2)$ を通るから

$3x_1+2y_1=4$

$y_1=-\frac{3}{2}x_1+2$ ……①

点 $(x_1,\ y_1)$ は円 $x^2+y^2=4$ 上の点であるから

${x_1}^2+{y_1}^2=4$ ……②

①を②に代入すると

$${x_1}^2+\left(-\frac{3}{2}x_1+2\right)^2=4$$

これを解くと　$x_1=0,\ \frac{24}{13}$

$x_1=0$ のとき　$y_1=2,$

$x_1=\frac{24}{13}$ のとき　$y_1=-\frac{10}{13}$

すなわち，求める接点は $(0,\ 2)$，$\left(\frac{24}{13},\ -\frac{10}{13}\right)$

したがって，**接点が $(0,\ 2)$ のとき，**

接線の方程式は　$y=2$

接点が $\left(\frac{24}{13},\ -\frac{10}{13}\right)$ のとき，

接線の方程式は　$12x-5y=26$

(2) (1)で求めた接点を A, B とするとき，直線 AB の方程式を求めよ。

2 点 $(0,\ 2)$，$\left(\frac{24}{13},\ -\frac{10}{13}\right)$ を通る直線の傾き m は

$$m=\frac{-\frac{10}{13}-2}{\frac{24}{13}-0}=-\frac{3}{2}$$

直線 AB は，点 $(0,\ 2)$ を通り，傾きは $-\frac{3}{2}$ であるから

$$y-2=-\frac{3}{2}(x-0)$$

$$y=-\frac{3}{2}x+2$$

すなわち　**$3x+2y=4$**

〔注意〕　一般に，円 $x^2+y^2=r^2$ に円外の点 $(a,\ b)$ から 2 本の接線を引き，その接点を A，B とすると，直線 AB の方程式は $ax+by=r^2$ である。

１４ 円 $x^2+y^2=20$ に接し，直線 $2x+y=10$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

直線 $2x+y=10$ の傾きは -2 であるから，この直線に垂直な直線の傾きは $\frac{1}{2}$ である。

よって，求める直線は　$y=\frac{1}{2}x+n$

すなわち，$x-2y+2n=0$ とおくことができる。この直線が与えられた円に接するための条件は，円の中心 $(0,\ 0)$ とこの直線の距離が，円の半径 $2\sqrt{5}$ に等しいことであるから

$$\frac{|\,2n\,|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$$

よって　$n=\pm 5$

ゆえに　**$y=\frac{1}{2}x+5,\ y=\frac{1}{2}x-5$**

１５　点 A$(4,\ 2)$ を中心とし，円 $x^2+y^2=5$ に接する円の方程式を求めよ。

円 $x^2+y^2=5$ の中心は $(0,\ 0)$，半径は $\sqrt{5}$ である。また，2 円の中心間の距離は $2\sqrt{5}$ である。

よって，求める円の半径は

2 円が外接するとき　$2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$

2 円が内接するとき　$2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

ゆえに，求める円の方程式は

$\boldsymbol{(x-4)^2+(y-2)^2=5,}$

$\boldsymbol{(x-4)^2+(y-2)^2=45}$

１６　円 $x^2+y^2-2kx-6y+k^2+5=0$ が，円 $x^2+y^2=49$ に含まれるとき，定数 k のとり得る値の範囲を求めよ。

$x^2+y^2-2kx-6y+k^2+5=0$　……①

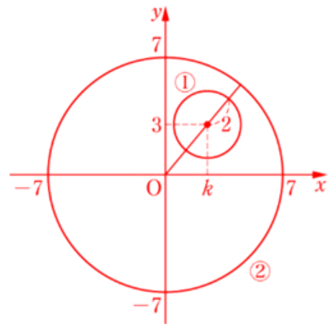
$x^2+y^2=49$　……②

とする。

①を変形すると

$(x-k)^2+(y-3)^2=4$

となり，これは中心 $(k,\ 3)$，半径 2 の円を表す。



円①が円②に含まれる条件は，円①，②の中心間の距離と円①の半径の和が，円②の半径より小さくなることである。

円①，②の中心間の距離は

$\sqrt{k^2+3^2}=\sqrt{k^2+9}$

したがって　$\sqrt{k^2+9}+2<7$

$\sqrt{k^2+9}<5$

$\sqrt{k^2+9}>0$ より　$k^2+9<25$

$k^2<16$

よって　$\boldsymbol{-4<k<4}$