数学特講b　第8回　解説

$\boxed{1}$ (1)　左辺を因数分解して　$(x-2)(4x-3)=0$

よって　　ア $x=2,\ \dfrac{3}{4}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -2 & \longrightarrow & -8 \\ 4 & & -3 & \longrightarrow & -3 \\ \hline 4 & & 6 & & -11 \end{array}$$

(2)　解の公式により

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot2\cdot(-9)}}{2\cdot2}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{88}}{4}=\frac{4\pm2\sqrt{22}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{22}}{2}$$

よって　　イ $x=\dfrac{2\pm\sqrt{22}}{2}$

参考　2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の実数解は，$b'^2-ac\geqq0$ のとき

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

この公式を用いて，解を求めると

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot(-9)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{22}}{2}$$

よって　　イ $x=\dfrac{2\pm\sqrt{22}}{2}$

(3)　この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-8)^2-4\cdot1\cdot(-2a)=8(a+8)$$

この方程式が実数解をもつための条件は $D\geqq0$ であるから　　$8(a+8)\geqq0$

よって　　ウ $a\geqq-8$

参考　2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式の符号の判定には，$\dfrac{D}{4}=(b')^2-ac$ を計算してもよい。

$\boxed{2}$ (1)　2 次方程式 $x^2-3ax+2a^2+a-1=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-3a)^2-4\cdot1\cdot(2a^2+a-1)$$

$$=a^2-4a+4=(a-2)^2$$

このグラフが x 軸に接するための条件は $D=0$ であるから　　$(a-2)^2=0$

よって　　ア $a=2$

接点の x 座標は　　$x=-\dfrac{-3a}{2\cdot1}=\dfrac{3}{2}a$

これに $a=2$ を代入すると　　$\dfrac{3}{2}\cdot2=$ イ 3

(2)　$-x^2+6x+1=0$ から　　$x^2-6x-1=0$

これを解くと　　$x=3\pm\sqrt{10}$

ゆえに，この 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標は

$(3+\sqrt{10},\ 0)$，$(3-\sqrt{10},\ 0)$

よって，求める線分の長さは

$(3+\sqrt{10})-(3-\sqrt{10})=$ ウ $2\sqrt{10}$

$\boxed{3}$ (1)　$x^2-3x-4\geqq0$ から　　$(x+1)(x-4)\geqq0$

よって　　ア $x\leqq-1,\ 4\leqq x$

(2)　両辺に -1 を掛けて　　$x^2-3x-2<0$

2 次方程式 $x^2-3x-2=0$ を解くと　　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

よって，この 2 次不等式の解は　　イ $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

(3)　$2x^2-9x+7\leqq0$ から　　$(x-1)(2x-7)\leqq0$

よって　　$1\leqq x\leqq\dfrac{7}{2}$　……①

$3x^2+8x-16>0$ から　　$(x+4)(3x-4)>0$

よって　　$x<-4,\ \dfrac{4}{3}<x$　……②

①，② の共通範囲を求めて　　ウ $\dfrac{4}{3}<x\leqq\dfrac{7}{2}$

4 (1)　$x^2+mx+3m-5=0$ の判別式を D とすると

$$D=m^2-4\cdot 1\cdot(3m-5)=m^2-12m+20$$
$$=(m-2)(m-10)$$

$x^2+mx+3m-5>0$ の解がすべての実数となるための条件は $D<0$ であるから

ア$2<m<$イウ10

(2)　$-1<x<2$ を解にもつ 2 次不等式の 1 つは　$(x+1)(x-2)<0$

すなわち　$x^2-x-2<0$

よって　$-x^2+x+2>0$

2 次不等式 $ax^2+bx+2>0$ の係数と比較して

$a=$エオ-1，$b=$カ1

(3)　$|x^2+2x-8|<7$ から　$-7<x^2+2x-8<7$

$-7<x^2+2x-8$ から　$x^2+2x-1>0$

よって　$x<-1-\sqrt{2}$，$-1+\sqrt{2}<x$ …… ①

$x^2+2x-8<7$ から　$x^2+2x-15<0$

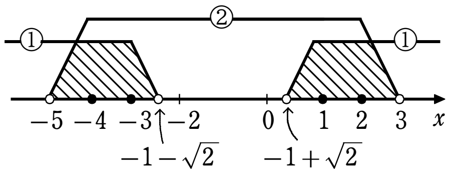
すなわち　$(x+5)(x-3)<0$

よって　$-5<x<3$ …… ②

ここで，$1<\sqrt{2}<2$ であるから

$-3<-1-\sqrt{2}<-2$，

$0<-1+\sqrt{2}<1$



①，② の共通範囲を求めて

$-5<x<-1-\sqrt{2}$，$-1+\sqrt{2}<x<3$

よって，不等式を満たす整数 x は

-4，-3，1，2　の キ4 個

5 (1)　$f(x)=x^2-2ax+a+2$ とする。

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

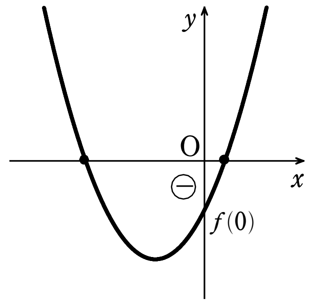
$$\frac{D}{4}=(-a)^2-(a+2)$$
$$=a^2-a-2=(a+1)(a-2)$$

方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，$D>0$ であるから

$(a+1)(a-2)>0$

よって　$a<$アイ-1，ウ$2<a$

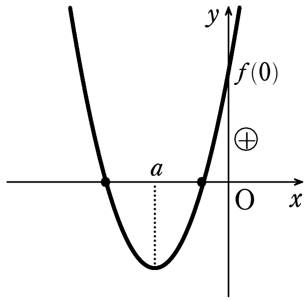
(2)　方程式 $f(x)=0$ が正の解と負の解をもつための条件は，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の正の部分と負の部分で交わることである。



右の図から　$f(0)=a+2<0$

よって　$a<$エオ-2

(3)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの負の解をもつための条件は，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わることである。



よって，右の図から

$D>0$　かつ　$f(0)>0$

かつ　軸について　$a<0$ …… ①

(1) より，

$D>0$ から　$a<-1$，$2<a$ …… ②

$f(0)=a+2$ であるから，$f(0)>0$ より

$a>-2$ …… ③

① ～ ③ の共通範囲を求めて　カキ$-2<a<$クケ-1