

3

節

軌跡と領域

1

軌跡の方程式

与えられた条件を満たす点全体の集合を，その条件を満たす点の
(^①) という。

例題 2点 A(0, 2), B(4, 0) から等距離にある点の軌跡を求めよ。

1

解

問1 2点 A(2, 0), B(−2, 0) に対して， $AP^2 - BP^2 = 16$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

例題 2点 A(−6, 0), B(2, 0) に対して， $AP : BP = 3 : 1$ であるような点 P の軌跡を求めよ。

2

解

注意 一般に $m \neq n$ のとき，2 定点 A, B に対し， $AP : BP = m : n$ を満たす点 P の軌跡は，線分 AB を $m : n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円になる。この円を“アポロニウスの円”という。
また， $m = n$ のときは，線分 AB の垂直二等分線となる。

問2 2点 A(−2, 0), B(3, 0) に対して， $AP : BP = 3 : 2$ であるような点 P の軌跡を求めよ。

応用
例題

3

円 $x^2 + y^2 = 4$ を C とする。 C 上を動く点 P と点 $A(4, 4)$ に対して，線分 AP の中点 Q の軌跡を求めよ。

考え方

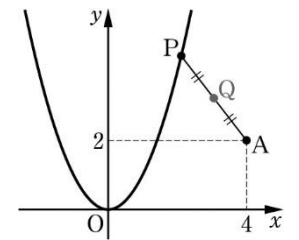
解

問3

例題 3 において，線分 AP を $1 : 2$ に内分する点 R の軌跡を求めよ。

問4

点 P が放物線 $y = x^2$ 上を動くとき，点 $A(4, 2)$ と点 P を結ぶ線分 AP の中点 Q の軌跡を求めよ。



2 不等式の表す領域

(教科書 p.97)

例 1 直線 $y = x + 1$ を l とし、平面上の点 $P(x_1, y_1)$ を通り y 軸に平行な直線と直線 l の交点を Q とすると

$$Q(x_1, x_1 + 1)$$

したがって、点 P の座標 (x_1, y_1) が

$$y_1 > x_1 + 1 \quad \dots\dots ①$$

を満たすならば、点 P は点 Q の上側にある。

x_1 は任意の実数であるから、①を満たす点 P

全体の集合は、直線 l の上側の部分である。

すなわち、1 次不等式

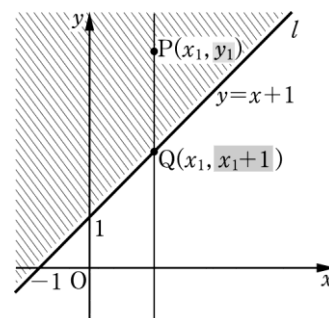
$$y > x + 1$$

を満たす点全体の集合は、直線 $y = x + 1$ の () の部分である。

同様にして、1 次不等式

$$y < x + 1$$

を満たす点全体の集合は、直線 $y = x + 1$ の () の部分である。



例題

4

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $2x - y + 1 > 0$ (2) $x \geq 2$

解

一般に、 x, y についての不等式があるとき、それを満たす点 (x, y) 全体の集合を、その
(^②) という。

不等式と直線の上側・下側

直線 $y = mx + n$ を l とすると

不等式 $y > mx + n$ の表す領域は **直線 l の上側**

不等式 $y < mx + n$ の表す領域は **直線 l の下側**

問5 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y > 3x + 2$

(2) $3x + 4y \leq 8$

(3) $2x - 5 < 0$

(4) $y \geq 2$

例2 円 $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$ の内部を表す不等式を考えてみよう。

この円は、点 $C(-3, 4)$ を中心とし、半径 $\sqrt{10}$ の円であるから、その内部の点 $P(x, y)$ は

$$CP < \sqrt{10}$$

を満たす。すなわち

$$CP^2 < 10$$

したがって

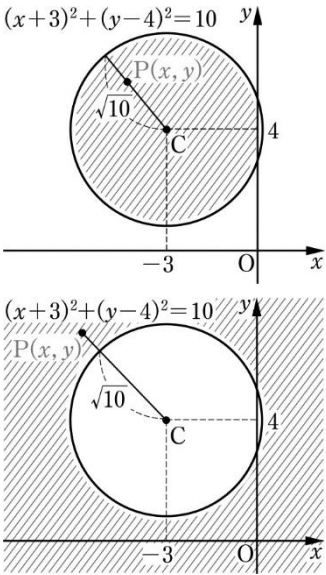
$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 < 10$$

これが円の（ ）を表す不等式である。

同様にして

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 > 10$$

は、円の（ ）を表す不等式である。



不等式と円の内部・外部	
円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ を C とすると	
不等式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ の表す領域は	円 C の内部
不等式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ の表す領域は	円 C の外部

問6 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $x^2 + y^2 > 4$

(2) $x^2 + y^2 \leq 8$

(3) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 < 1$

(4) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 \geq 0$

問7 次の図の斜線部分はどのような不等式で表されるか。

