## ベクトルの実数倍

（教科書 p.54）

ベクトル $\vec{a}$ と実数 $k$ に対して，$\vec{a}$ の $k$ 倍（[19] $\boldsymbol{k\vec{a}}$ ）を次のように定義する。

(i)　$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき, $k\vec{a}$ は

$k > 0$ ならば，$\vec{a}$ と同じ向きで，大きさが $k$ 倍のベクトル

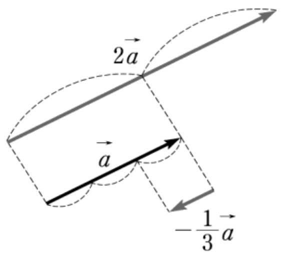
$k < 0$ ならば，$\vec{a}$ と反対の向きで，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

$k = 0$ ならば，$\vec{0}$　すなわち　$0\vec{a} = \vec{0}$

(ii)　$\vec{a} = \vec{0}$ のとき，任意の実数 $k$ に対して　$k\vec{0} = \vec{0}$

**例 1** ベクトル $\vec{a}$ に対して，$2\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きで大きさが 2 倍のベクトルである。

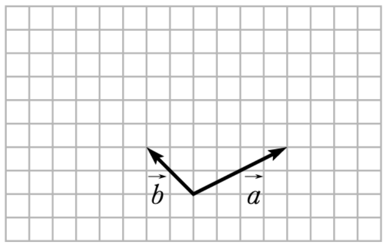
$-\dfrac{1}{3}\vec{a}$は $\vec{a}$と反対の向きで大きさが $\dfrac{1}{3}$倍のベクトルである。

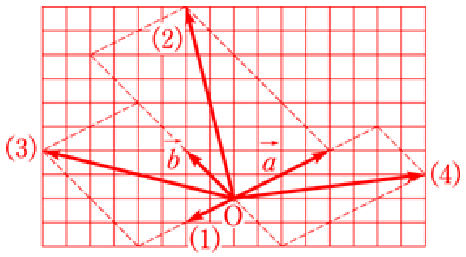



**問8** 右の図のように $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき, 次のベクトルを図示せよ。

(1)　$-\dfrac{1}{2}\vec{a}$　　(2)　$\vec{a} + 3\vec{b}$

(3)　$-\vec{a} + 2\vec{b}$　　(4)　$\dfrac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}$



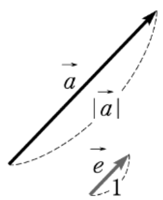




注意　$\dfrac{1}{k}\vec{a}$ を $\dfrac{\vec{a}}{k}$ と書くことがある。

大きさが 1 のベクトルを（[20] 単位ベクトル ）という。

一般に，$\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$とすると，次のようになる。

（[21] $\boldsymbol{\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$ ）




**問9** $|\vec{a}| = 3$ のとき，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

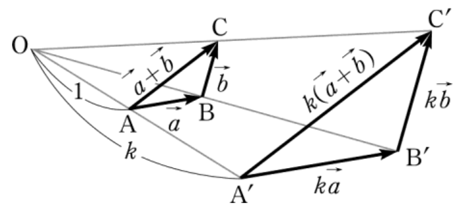
$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{a}}$$

実数 $k$, $l$ に対して，次の法則が成り立つ。

| ベクトルの実数倍 | |
|---|---|
| $\boxed{1}$ | $\boldsymbol{k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}}$ |
| $\boxed{2}$ | $\boldsymbol{(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}}$ |
| $\boxed{3}$ | $\boldsymbol{k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}}$ |

**問10** 次の図を用いて，上の $\boxed{3}$ が成り立つことを確かめよ。




$\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{B'C'}} = k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{A'C'}} = k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

であるから

$$\begin{aligned} k(\vec{a}+\vec{b}) &= k\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{A'C'}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{A'B'}} + \overrightarrow{\mathrm{B'C'}} \\ &= k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + k\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= k\vec{a} + k\vec{b} \end{aligned}$$

**例 2** $2(\vec{a} - 4\vec{b}) + 3(2\vec{a} + 3\vec{b}) = 2\vec{a} - 8\vec{b} + 6\vec{a} + 9\vec{b}$

$= (2+6)\vec{a} + (-8+9)\vec{b} = 8\vec{a} + \vec{b}$

次を計算せよ。

(1)　$3\vec{a}+4\vec{a}-2\vec{a}$

$=(3+4-2)\vec{a}=\boldsymbol{5\vec{a}}$

(2)　$3(\vec{a}+2\vec{b})-5(2\vec{a}-\vec{b})$

$=3\vec{a}+6\vec{b}-10\vec{a}+5\vec{b}$

$=(3-10)\vec{a}+(6+5)\vec{b}$

$=\boldsymbol{-7\vec{a}+11\vec{b}}$

問12　次の式を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(1)　$\vec{x}-3\vec{b}=-2\vec{x}+9\vec{a}$

$\vec{x}-3\vec{b}=-2\vec{x}+9\vec{a}$

$\vec{x}+2\vec{x}=9\vec{a}+3\vec{b}$

$(1+2)\vec{x}=9\vec{a}+3\vec{b}$

$3\vec{x}=9\vec{a}+3\vec{b}$

$\boldsymbol{\vec{x}=3\vec{a}+\vec{b}}$

(2)　$3(\vec{x}-2\vec{a})-2(\vec{x}-4\vec{b})=2\vec{a}-4\vec{b}-3\vec{x}$

$3(\vec{x}-2\vec{a})-2(\vec{x}-4\vec{b})=2\vec{a}-4\vec{b}-3\vec{x}$

$3\vec{x}-6\vec{a}-2\vec{x}+8\vec{b}=2\vec{a}-4\vec{b}-3\vec{x}$

$(3-2+3)\vec{x}=(2+6)\vec{a}+(-4-8)\vec{b}$

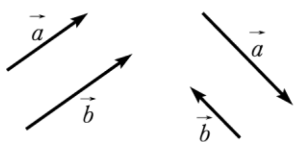
$4\vec{x}=8\vec{a}-12\vec{b}$

$\boldsymbol{\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}}$

## ベクトルの平行

（教科書 p.56）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が，同じ向きまたは反対向きであるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（㉒　平行　）であるといい，（㉓　$\boldsymbol{\vec{a} /\!/ \vec{b}}$　）と書く。

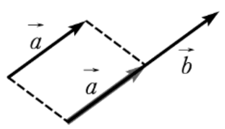



ベクトルの平行の定義と実数倍の定義から，次のことがわかる。

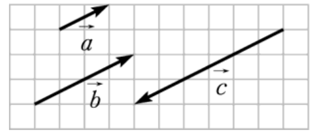
**ベクトルの平行条件**

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$\boldsymbol{\vec{a} /\!/ \vec{b}} \iff$ $\boldsymbol{\vec{b}=k\vec{a}}$ となる実数 $\boldsymbol{k}$ がある




問13　右の図で，$\vec{b}$, $\vec{c}$ を $\vec{a}$ で表せ。また，$\vec{a}$, $\vec{b}$ を $\vec{c}$ で表せ。



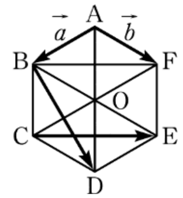

$\boldsymbol{\vec{b}=2\vec{a}}$,　$\boldsymbol{\vec{c}=-3\vec{a}}$,　$\boldsymbol{\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{c}}$,　$\boldsymbol{\vec{b}=-\frac{2}{3}\vec{c}}$

## ベクトルの分解

（教科書 p.56）

例題 1　右の図の正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(1)　$\overrightarrow{CE}$　　　(2)　$\overrightarrow{BD}$




解　(1)　$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BF}$ であるから　　$\overrightarrow{CE}=\vec{b}-\vec{a}$

(2)　正六角形の中心を O とすると

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}$

ゆえに　　$\overrightarrow{BD}=\vec{a}+2\vec{b}$

問14　例題 1 で，$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DF}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

$\boldsymbol{\overrightarrow{AE}}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BO}$

$=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{\vec{a}+2\vec{b}}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{CB}}=\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AO}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})$

$=-(\vec{a}+\vec{b})=\boldsymbol{-\vec{a}-\vec{b}}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{DF}}=\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$

$=(-\vec{a}-\vec{b})-\vec{a}=\boldsymbol{-2\vec{a}-\vec{b}}$

一般に，平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，次のことが成り立つ。

**分解の一意性**

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ は，$\vec{p}=k\vec{a}+l\vec{b}$ の形にただ 1 通りに表される。ただし，$k$, $l$ は実数である。

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，次のことが成り立つ。

（㉔　$\boldsymbol{k\vec{a}+l\vec{b}=k'\vec{a}+l'\vec{b} \iff k=k',\ l=l'}$　）

とくに　（㉕　$\boldsymbol{k\vec{a}+l\vec{b}=\vec{0} \iff k=l=0}$　）

注意　$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は（㉖　**1 次独立**　）であるという