3節 軌跡と領域

1 軌跡の方程式

（教科書 p.94）

与えられた条件を満たす点全体の集合を，その条件を満たす点の（① 軌跡 ）という。

例題 1 2 点 A(0, 2), B(4, 0) から等距離にある点の軌跡を求めよ。

解 1 条件を満たす点 P の座標を $(x,\ y)$ とするとAP = BP より，

$AP^2 = BP^2$ であるから

$x^2+(y-2)^2=(x-4)^2+y^2$

したがって　$2x-y-3=0$

よって，点 P は直線 $2x-y-3=0$ 上にある。

2 逆に，直線 $2x-y-3=0$ 上の任意の点は $P(t,\ 2t-3)$ と表され

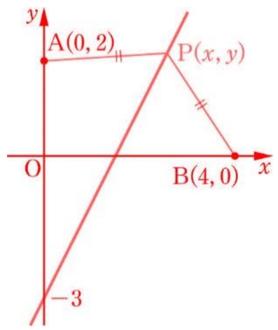
$AP^2=t^2+(2t-5)^2=5t^2-20t+25$

$BP^2=(t-4)^2+(2t-3)^2=5t^2-20t+25$

であるから　$AP^2=BP^2$

すなわち　AP = BP

1，2 より，求める軌跡は直線 $2x-y-3=0$ である。



問1 2 点 A(2, 0), B(−2, 0) に対して，$AP^2-BP^2=16$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

$P(x,\ y)$ とすると，$AP^2-BP^2=16$ より

$\{(x-2)^2+y^2\}-\{(x+2)^2+y^2\}=16$

整理して　$x=-2$

ゆえに，求める軌跡は**直線 $x=-2$** である。

例題 2 2 点 A(−6, 0), B(2, 0) に対して，AP : BP = 3 : 1 であるような点 P の軌跡を求めよ。

解 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

AP : BP = 3 : 1

よって　AP = 3BP

両辺を 2 乗すると

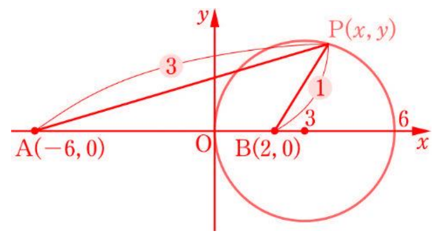
$AP^2=9BP^2$

すなわち　$(x+6)^2+y^2=9\{(x-2)^2+y^2\}$

整理すると　$x^2+y^2-6x=0$

$(x-3)^2+y^2=3^2$

ゆえに，点 P の軌跡は中心 (3, 0)，半径 3 の円である。



注意 一般に $m \neq n$ のとき，2 定点 A, B に対し，AP : BP = $m:n$ を満たす点 P の軌跡は，線分 AB を $m:n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円になる。この円を “アポロニウスの円” という。

また，$m=n$ のときは，線分 AB の垂直二等分線となる。

問2 2 点 A(−2, 0), B(3, 0) に対して，AP : BP = 3 : 2 であるような点 P の軌跡を求めよ。

$P(x,\ y)$ とする。

AP : BP = 3 : 2 より　2AP = 3BP

両辺を 2 乗して　$4AP^2=9BP^2$

すなわち　$4\{(x+2)^2+y^2\}=9\{(x-3)^2+y^2\}$

整理して　$x^2+y^2-14x+13=0$

$(x-7)^2+y^2=36$

ゆえに，点 P の軌跡は**中心 (7, 0)，半径 6 の円**である。

応用例題 3 円 $x^2+y^2=4$ を C とする。C 上を動く点 P と点 A$(4,\ 4)$ に対して，線分 AP の中点 Q の軌跡を求めよ。

考え方
(i) AP の中点 Q の座標を $(x,\ y)$ とおく。
(ii) 点 P の座標を $(s,\ t)$ とおき，$x,\ y$ を $s,\ t$ を用いて表す。
(iii) $x,\ y,\ s,\ t$ の関係式を $s,\ t$ について解く。
(iv) $s,\ t$ の条件式に代入して，$x,\ y$ の方程式を導く。

解 線分 AP の中点 Q の座標を $(x,\ y)$ とする。また，点 P の座標を $(s,\ t)$ とすると，これは C 上の点であるから

$s^2+t^2=4$ ……①

Q は線分 AP の中点であるから

$$x=\frac{4+s}{2},\quad y=\frac{4+t}{2}$$

すなわち

$s=2x-4,\ t=2y-4$ ……②

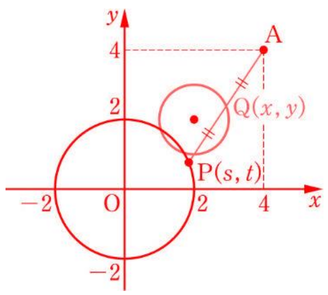
②を①に代入すると

$$(2x-4)^2+(2y-4)^2=4$$

すなわち

$$(x-2)^2+(y-2)^2=1$$

ゆえに，点 Q の軌跡は，中心 $(2,\ 2)$，半径 1 の円である。



問3 例題 3 において，線分 AP を 1 : 2 に内分する点 R の軌跡を求めよ。

P$(s,\ t)$ とすると，これは円上の点であるから

$s^2+t^2=4$ ……①

R$(x,\ y)$ とすると，R は線分 AP を 1 : 2 に内分する点であるから

$$x=\frac{8+s}{3},\quad y=\frac{8+t}{3}$$

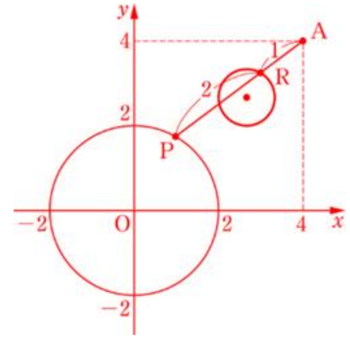
すなわち　$s=3x-8,\ t=3y-8$

これらを①に代入すると

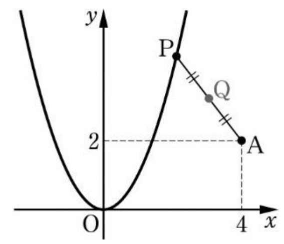
$$(3x-8)^2+(3y-8)^2=4$$

すなわち　$\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

ゆえに，点 R の軌跡は，**中心 $\left(\frac{8}{3},\ \frac{8}{3}\right)$，半径 $\frac{2}{3}$ の円**である。



問4 点 P が放物線 $y=x^2$ 上を動くとき，点 A$(4,\ 2)$ と点 P を結ぶ線分 AP の中点 Q の軌跡を求めよ。



点 P の座標を $(s,\ t)$ とすると，これは放物線上の点であるから

$t=s^2$ ……①

また，点 Q の座標を $(x,\ y)$ とすると， Q は線分 AP の中点であるから

$$x=\frac{s+4}{2},\quad y=\frac{t+2}{2}$$

すなわち　$s=2x-4,\ t=2y-2$

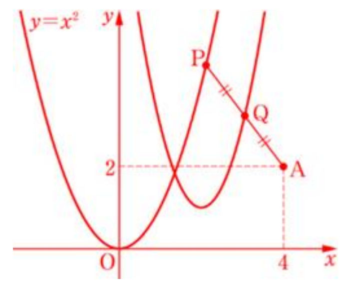
これらを①に代入すると

$2y-2=(2x-4)^2$

$2y-2=4x^2-16x+16$

よって　$y=2x^2-8x+9$

ゆえに，点 Q の軌跡は**放物線 $y=2x^2-8x+9$** である。



2 不等式の表す領域

（教科書 p.97）

例 1 直線 $y=x+1$ を l とし，平面上の点 $P(x_1,\ y_1)$ を通り y 軸に平行な直線と直線 l の交点を Q とすると

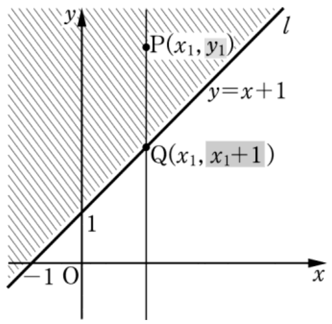
$Q(x_1,\ x_1+1)$

したがって，点 P の座標 $(x_1,\ y_1)$ が

$y_1 > x_1+1$ ……①

を満たすならば，点 P は点 Q の上側にある。

x_1 は任意の実数であるから，①を満たす点 P 全体の集合は，直線 l の上側の部分である。



すなわち，1 次不等式

$y > x+1$

を満たす点全体の集合は，直線 $y=x+1$ の（ 上側 ）の部分である。

同様にして，1 次不等式

$y < x+1$

を満たす点全体の集合は，直線 $y=x+1$ の（ 下側 ）の部分である。

一般に，$x,\ y$ についての不等式があるとき，それを満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を，その（② 不等式の表す領域 ）という。

不等式と直線の上側・下側
直線 $y=mx+n$ を l とすると 不等式 $\boldsymbol{y > mx+n}$ の表す領域は **直線 $\boldsymbol{l}$ の上側** 不等式 $\boldsymbol{y < mx+n}$ の表す領域は **直線 $\boldsymbol{l}$ の下側**

例題 4 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $2x-y+1>0$　　(2) $x \geqq 2$

解 (1) 与えられた不等式より

$y < 2x+1$

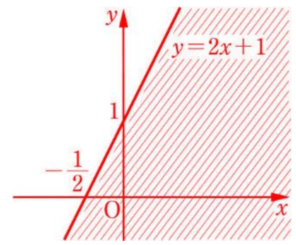
したがって，求める領域は直線

$y = 2x+1$

の下側である。

すなわち，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線は含まない。



◀点 (0, 0) は不等式を満たすから (0, 0) を含む側が領域

(2) 求める領域は

$x \geqq 2$

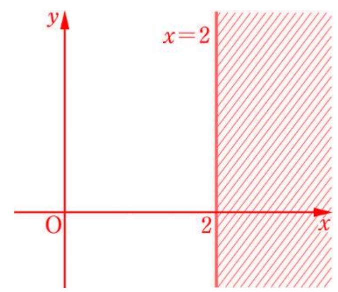
を満たす x と任意の y を座標とする点 $(x,\ y)$ の全体である。

したがって，直線

$x=2$

および，その右側である。

すなわち，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

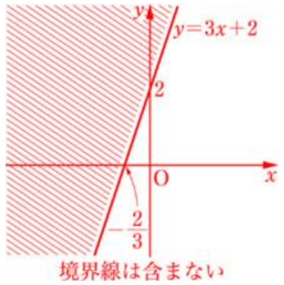


◀点 (0, 0) は不等式を満たさないから (0, 0) を含まない側が領域

問5 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y > 3x + 2$

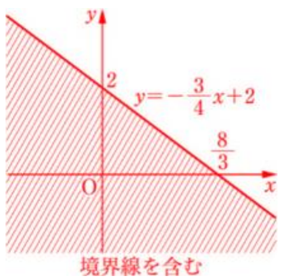
求める領域は，次の図の斜線部分となる。



(2)　$3x + 4y \leqq 8$

$y \leqq -\frac{3}{4}x + 2$

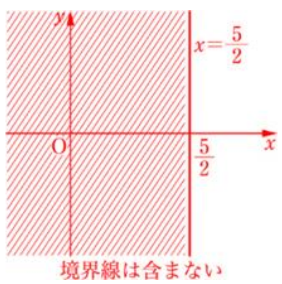
求める領域は，次の図の斜線部分となる。



(3)　$2x - 5 < 0$

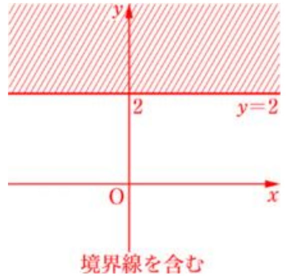
$x < \frac{5}{2}$

求める領域は，次の図の斜線部分となる。



(4)　$y \geqq 2$

求める領域は，次の図の斜線部分となる。



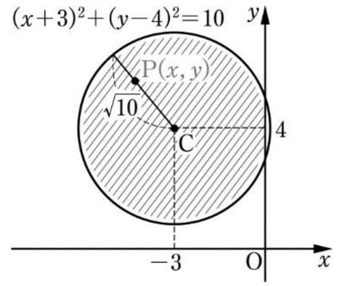
例 2 円 $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 10$ の内部を表す不等式を考えてみよう。

この円は，点 $\mathrm{C}(-3,\ 4)$ を中心とし，半径 $\sqrt{10}$ の円であるから，その内部の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

$$\mathrm{CP} < \sqrt{10}$$

を満たす。すなわち

$$\mathrm{CP}^2 < 10$$



したがって

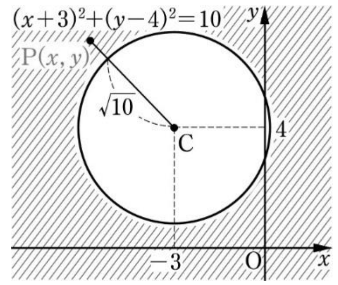
$$(x+3)^2 + (y-4)^2 < 10$$

これが円の（　内部　）を表す不等式である。

同様にして

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 > 10$$

は，円の（　外部　）を表す不等式である。

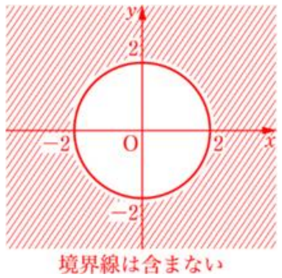


不等式と円の内部・外部
円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ を C とすると 不等式　$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})^2 < \boldsymbol{r}^2$ の表す領域は　**円 C の内部** 不等式　$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})^2 > \boldsymbol{r}^2$ の表す領域は　**円 C の外部**

問6 次の不等式の表す領域を図示せよ。

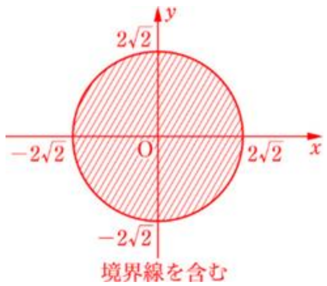
(1) $x^2+y^2>4$

求める領域は，次の図の斜線部分となる。



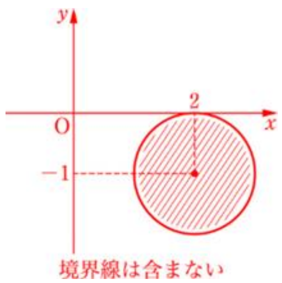
(2) $x^2+y^2 \leqq 8$

求める領域は，次の図の斜線部分となる。



(3) $(x-2)^2+(y+1)^2<1$

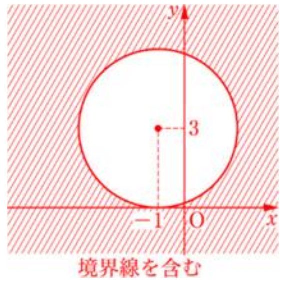
求める領域は，次の図の斜線部分となる。



(4) $x^2+y^2+2x-6y+1 \geqq 0$

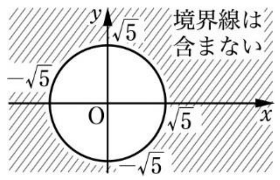
$(x+1)^2+(y-3)^2 \geqq 9$

求める領域は，次の図の斜線部分となる。



問7 次の図の斜線部分はどのような不等式で表されるか。

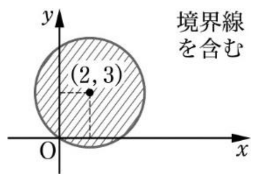
(1)



中心 $(0,\ 0)$，半径 $\sqrt{5}$ の円の外部であるから

$\boldsymbol{x^2+y^2>5}$

(2)



中心 $(2,\ 3)$，半径 $\sqrt{13}$ の円の内部および周であるから

$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-3)^2 \leqq 13}$