$\boxed{1}$ (1)　正弦定理により　$\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$

よって　$\sin A=\dfrac{\sin 135^\circ}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$C=135^\circ$ から　$0^\circ<A<45^\circ$

ゆえに　$A={}^{ア}30^\circ$

(2)　$B=180^\circ-(120^\circ+15^\circ)=45^\circ$

よって，正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{12}{\sin 45^\circ}$

ゆえに　$\mathrm{BC}=\dfrac{12\sin 120^\circ}{\sin 45^\circ}=12\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}={}^{イ}6\sqrt{6}$

また，正弦定理により　$\dfrac{12}{\sin 45^\circ}=2R$

よって　$R=\dfrac{6}{\sin 45^\circ}=6\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}={}^{ウ}6\sqrt{2}$

$\boxed{2}$ (1)　余弦定理により

$$\mathrm{CA}^2=10^2+8^2-2\cdot10\cdot8\cos 120^\circ$$
$$=100+64-2\cdot10\cdot8\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=244$$

$\mathrm{CA}>0$ であるから　$\mathrm{CA}=\sqrt{244}={}^{ア}2\sqrt{61}$

(2)　余弦定理により

$$(\sqrt{7})^2=\mathrm{AB}^2+(\sqrt{3})^2-2\mathrm{AB}\cdot\sqrt{3}\cos 30^\circ$$

よって　$\mathrm{AB}^2-3\mathrm{AB}-4=0$

すなわち　$(\mathrm{AB}+1)(\mathrm{AB}-4)=0$

$\mathrm{AB}>0$ であるから　$\mathrm{AB}={}^{イ}4$

(3)　余弦定理により

$$\cos A=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$A={}^{ウ}45^\circ$

同様に　$\cos B=\dfrac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot2\cdot(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{1}{2}$

よって　$B={}^{エ}60^\circ$

また　$C=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)={}^{オ}75^\circ$

$\boxed{3}$ 余弦定理により

$$10^2=\mathrm{CA}^2+(10\sqrt{3})^2-2\mathrm{CA}\cdot10\sqrt{3}\cos 30^\circ$$

よって　$\mathrm{CA}^2-30\mathrm{CA}+200=0$

すなわち　$(\mathrm{CA}-10)(\mathrm{CA}-20)=0$

$\mathrm{CA}>0$ であるから　$\mathrm{CA}={}^{ア}10,\ {}^{イ}20$

[1]　$\mathrm{CA}=10$ のとき

△ABC は AB＝CA の二等辺三角形であるから

$B=C={}^{エ}30^\circ$

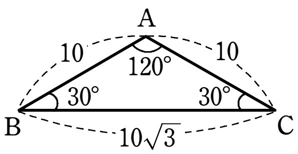
よって　$A=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)$
$={}^{ウ}120^\circ$

[2]　$\mathrm{CA}=20$ のとき

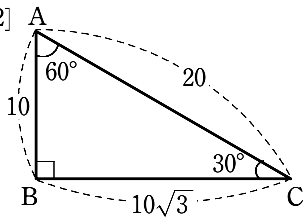
$\mathrm{AB}:\mathrm{CA}:\mathrm{BC}=10:20:10\sqrt{3}$
$=1:2:\sqrt{3}$

よって，△ABC は $A={}^{オ}60^\circ$，$B={}^{カ}90^\circ$，$C=30^\circ$ の直角三角形である。

[1]



[2]



$\boxed{4}$ 余弦定理により

$$\mathrm{CA}^2=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$=16+4-2\cdot4\cdot2\cdot\frac{1}{4}=16$$

$\mathrm{CA}>0$ であるから　　$\mathrm{CA}={}^{ア}4$

$\sin\angle\mathrm{ABC}>0$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{{}^{イウ}15}}{{}^{エ}4}$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$\frac{4}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=2R$$

よって　　$R=\dfrac{2}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=2\div\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{{}^{オ}8\sqrt{{}^{カキ}15}}{{}^{クケ}15}$

$\boxed{5}$ (1)　$\angle\mathrm{ACB}$ が鋭角であるための必要十分条件は　　$a^2+b^2>c^2$　(ア ⑥)

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ において，C が最大の角であるとき，次が成り立つ。

鋭角三角形 $\Longleftrightarrow$ C が鋭角 $\Longleftrightarrow$ $a^2+b^2>c^2$

直角三角形 $\Longleftrightarrow$ C が直角 $\Longleftrightarrow$ $a^2+b^2=c^2$

鈍角三角形 $\Longleftrightarrow$ C が鈍角 $\Longleftrightarrow$ $a^2+b^2<c^2$

(i)　$2^2+3^2<4^2$ であるから　　鈍角三角形

(ii)　$3^2+4^2=5^2$ であるから　　直角三角形

(iii)　$4^2+5^2>6^2$ であるから　　鋭角三角形

(iv)　$7^2+11^2>13^2$ であるから　　鋭角三角形

(v)　$1<\sqrt{3}<2$ であり，$1^2+(\sqrt{3})^2=2^2$ であるから　　直角三角形

(vi)　$\sqrt{5}<\sqrt{7}<4$ であり，$(\sqrt{5})^2+(\sqrt{7})^2<4^2$ であるから　　鈍角三角形

(vii)　$(2\sqrt{7})^2=28$，$(3\sqrt{5})^2=45$，$(5\sqrt{3})^2=75$

よって，$2\sqrt{7}<3\sqrt{5}<5\sqrt{3}$ であり，$(2\sqrt{7})^2+(3\sqrt{5})^2<(5\sqrt{3})^2$ であるから

鈍角三角形

(i) ～ (vii) のうち，鋭角三角形は　${}^{イ}2$ 個，

鈍角三角形は　${}^{ウ}3$ 個