$\boxed{1}$ $\triangle$ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot10\cdot6\sin120^\circ=\frac{1}{2}\cdot10\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}={}^{ア}15\sqrt{3}$$

余弦定理により

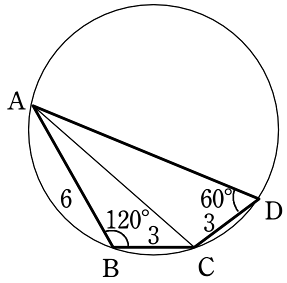
$$\mathrm{AC}^2=10^2+6^2-2\cdot10\cdot6\cos120^\circ$$
$$=100+36-2\cdot10\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=196$$

AC>0 であるから　　$\mathrm{AC}=\sqrt{196}={}^{イ}14$

また，$\triangle$ABC の内接円の半径を r とすると　　$S=\frac{1}{2}r(10+6+14)=15r$

よって，$15r=15\sqrt{3}$ から　　$r={}^{ウ}\sqrt{3}$

$\boxed{2}$ $\triangle$ABC において，余弦定理により



$$\mathrm{AC}^2=6^2+3^2-2\cdot6\cdot3\cos120^\circ$$
$$=36+9-2\cdot6\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=63$$

AC>0 であるから　　$\mathrm{AC}=\sqrt{63}={}^{ア}3\sqrt{7}$

また，四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle\mathrm{ADC}=180^\circ-\angle\mathrm{ABC}$$
$$=180^\circ-120^\circ=60^\circ$$

$\triangle$ACD において，余弦定理により

$$63=\mathrm{AD}^2+3^2-2\mathrm{AD}\cdot3\cos60^\circ$$

よって　　$\mathrm{AD}^2-3\mathrm{AD}-54=0$

すなわち　$(\mathrm{AD}+6)(\mathrm{AD}-9)=0$

AD>0 であるから　　$\mathrm{AD}={}^{イ}9$

したがって，四角形 ABCD の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}\cdot6\cdot3\sin120^\circ+\frac{1}{2}\cdot3\cdot9\sin60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot6\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}={}^{ウ}\frac{45\sqrt{3}}{4}$$

$\boxed{3}$ $\triangle$ABC において，余弦定理により

$$\mathrm{CA}^2=50^2+80^2-2\cdot50\cdot80\cos60^\circ$$
$$=2500+6400-2\cdot50\cdot80\cdot\frac{1}{2}=4900$$

CA>0 であるから　　$\mathrm{CA}={}^{ア}70$ (m)

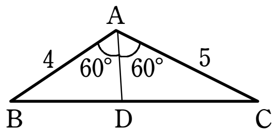
また，$\triangle$ACD において

$$\angle\mathrm{ADC}=180^\circ-(45^\circ+105^\circ)=30^\circ$$

$\triangle$ACD において，正弦定理により　　$\dfrac{\mathrm{CD}}{\sin45^\circ}=\dfrac{70}{\sin30^\circ}$

よって　　$\mathrm{CD}=\dfrac{70\sin45^\circ}{\sin30^\circ}=70\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\dfrac{1}{2}={}^{イ}70\sqrt{2}$ (m)

4 △ABD＋△ADC＝△ABC であるから



$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot \mathrm{AD}\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot \mathrm{AD}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\sin 120^\circ$$

よって　　$4\mathrm{AD}+5\mathrm{AD}=20$

これを解くと　　$\mathrm{AD}=\dfrac{{}^{\text{アイ}}20}{{}^{\text{ウ}}9}$

△ABD において，余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=4^2+\left(\frac{20}{9}\right)^2-2\cdot 4\cdot \frac{20}{9}\cos 60^\circ$$

$$=16+\frac{400}{81}-2\cdot 4\cdot \frac{20}{9}\cdot \frac{1}{2}=\frac{976}{81}$$

BD＞0 であるから　　$\mathrm{BD}=\sqrt{\dfrac{976}{81}}=\dfrac{{}^{\text{エ}}4\sqrt{{}^{\text{オカ}}61}}{{}^{\text{キ}}9}$

別解　△ABC において，余弦定理により

$$\mathrm{BC}^2=4^2+5^2-2\cdot 4\cdot 5\cos 120^\circ$$

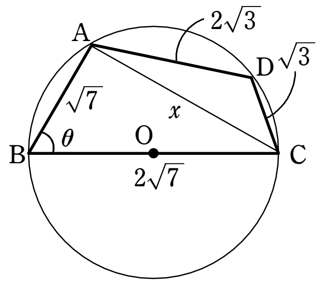
$$=16+25-2\cdot 4\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=61$$

BC＞0 であるから　　$\mathrm{BC}=\sqrt{61}$

AD は ∠BAC の二等分線であるから　　BD：DC＝AB：AC＝4：5

よって　$\mathrm{BD}=\dfrac{4}{9}\mathrm{BC}=\dfrac{{}^{\text{エ}}4\sqrt{{}^{\text{オカ}}61}}{{}^{\text{キ}}9}$

5 △ABC において，余弦定理により



$$x^2=(\sqrt{7})^2+(2\sqrt{7})^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cos\theta$$

$$={}^{\text{アイ}}35-28\cos\theta \quad \cdots\cdots ①$$

△ACD において，余弦定理により

$$x^2=(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cos(180^\circ-\theta)$$

$$=15+{}^{\text{ウエ}}12\cos\theta \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　　$35-28\cos\theta=15+12\cos\theta$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{{}^{\text{オ}}1}{{}^{\text{カ}}2}$　　ゆえに　　$\theta=60^\circ$

① から　　$x^2=35-28\cdot\dfrac{1}{2}=21$

$x>0$ であるから　　$x=\sqrt{{}^{\text{キク}}21}$

よって　　$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}:\mathrm{AC}=\sqrt{7}:2\sqrt{7}:\sqrt{21}=1:2:\sqrt{3}$

△ABC は ∠BAC＝90° の直角三角形である。

したがって，線分 BC は円 O の直径であり，円 O の半径は　　$\sqrt{{}^{\text{ケ}}7}$

また，四角形 ABCD の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\sin 120^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$={}^{\text{コ}}5\sqrt{{}^{\text{サ}}3}$$