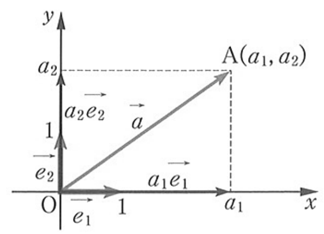
3 ベクトルの成分

座標とベクトル

（教科書 p.58）

O を原点とする座標平面上で，x 軸および y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを，（㉗　基本ベクトル　）といい，それぞれ（㉘　$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$　）で表す。



◀ $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ は 1 次独立であるから，この表し方はただ 1 通りである。

いま，与えられたベクトル $\vec{a}$ に対して，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A をとり，その座標を $(a_1,\ a_2)$ とすると，$\vec{a}$ は

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

と表される。

これを $\vec{a}$ の（㉙　基本ベクトル表示　）という。この a_1，a_2 をそれぞれ $\vec{a}$ の（㉚　x 成分，y 成分　）といい，$\vec{a}$ を

（㉛　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$　）

と表す。この表し方を，$\vec{a}$ の（㉜　成分表示　）という。

ベクトルの表示	
$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$	基本ベクトル表示
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$	成分表示

また，2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ に対して

（㉝　$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$　）

$\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ は，線分 OA の長さであるから，成分表示されたベクトルの大きさは，次のようになる。

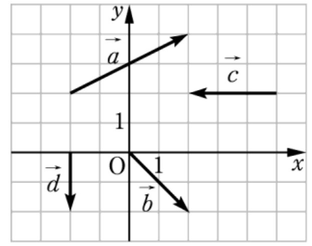
ベクトルの大きさ
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

例 3 基本ベクトル表示が $\vec{a}=4\vec{e_1}-3\vec{e_2}$ であるベクトル $\vec{a}$ において

$\vec{a}$ の成分表示は　$\vec{a}=(4,\ -3)$

$\vec{a}$ の大きさは　$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

問15 右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を成分表示し，その大きさを求めよ。



$\vec{a}=(4,\ 2)$，$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\vec{b}=(2,\ -2)$，$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\vec{c}=(-3,\ 0)$，$|\vec{c}|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=\sqrt{9}=3$

$\vec{d}=(0,\ -2)$，$|\vec{d}|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=\sqrt{4}=2$

成分による演算

（教科書 p.59）

和，差，実数倍の演算を成分を用いて表すと，次のようになる。

成分による演算		
1	$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$	
2	$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$	
3	$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$	k は実数

例 4 $\vec{a}=(5,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ のとき

$\vec{a}+\vec{b}=(5+3, 2+4)=(8, 6)$

$3\vec{a}-2\vec{b}=3(5, 2)-2(3, 4)=(15, 6)-(6, 8)=(9, -2)$

問16 $\vec{a}=(2,\ -3)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分表示せよ。

(1)　$\vec{a}+\vec{b}$

$=(2,\ -3)+(-1,\ 2)$

$=(2-1,\ -3+2)$

$=(1,\ -1)$

(2)　$2\vec{a}-5\vec{b}$

$=2(2,\ -3)-5(-1,\ 2)$

$=(4,\ -6)-(-5,\ 10)$

$=(4+5,\ -6-10)$

$=(9,\ -16)$

(3)　$3\left(2\vec{a}-6\vec{b}\right)-5\left(\vec{a}-4\vec{b}\right)$

$=6\vec{a}-18\vec{b}-5\vec{a}+20\vec{b}$

$=\vec{a}+2\vec{b}$

$=(2-3)+2\left(-1,\ 2\right)$

$=(2-3)+\left(-2,\ 4\right)$

$=\left(2-2,\ \ -3+4\right)$

$=\left(\mathbf{0},\ \mathbf{1}\right)$

問17　$\vec{a}=(3,\ 0)$, $\vec{b}=(4,\ -5)$ のとき，$\vec{a}-3\vec{x}=2\left(\vec{x}+\vec{b}\right)$ を満たす $\vec{x}$ の成分表示を求めよ。

$\vec{a}-3\vec{x}=2\left(\vec{x}+\vec{b}\right)$

$\vec{a}-3\vec{x}=2\vec{x}+2\vec{b}$

$-5\vec{x}=-\vec{a}+2\vec{b}$

$\vec{x}=\dfrac{1}{5}\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$

$=\dfrac{1}{5}\left\{(3,\ \ 0)-2\left(4,\ \ -5\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{5}\left\{(3,\ \ 0)-\left(8,\ \ -10\right)\right\}$

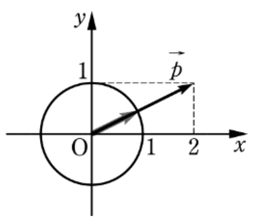
$=\dfrac{1}{5}(-5,\ \ 10)=\left(-\mathbf{1},\ \ \mathbf{2}\right)$

例 5　$\vec{p}=(2,\ 1)$ のとき，$\vec{p}$ と同じ向きの単位ベクトルの成分表示を求めてみよう。

$|\vec{p}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

であるから，求める単位ベクトルは

$\dfrac{\vec{p}}{|\vec{p}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{p}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$



問18　$\vec{a}=(12,\ -5)$ と同じ向きの単位ベクトルを成分表示せよ。

$|\vec{a}|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$

よって，求める単位ベクトルは

$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{13}\vec{a}=\left(\dfrac{\mathbf{12}}{\mathbf{13}},\ \ -\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}}\right)$

例題 2　$\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=(5,\ 4)$ を $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表せ。

解　$k\vec{a}+l\vec{b}=k(2,\ 3)+l(-1,\ 2)$

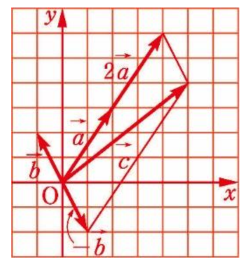
$=(2k-l, 3k+2l)$

これが $\vec{c}=(5,\ 4)$ に等しいから

$2k-l=5, 3k+2l=4$

これを解いて　$k=2,\ l=-1$

ゆえに　$\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$



問19　$\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$ のとき，次のベクトルを $k\vec{a}+l\vec{b}$ の形で表せ。

(1)　$\vec{c}=(5,\ 1)$

$k\vec{a}+l\vec{b}=k\left(1,\ \ 2\right)+l\left(1,\ \ -1\right)$

$=\left(k+l,\ \ 2k-l\right)$

これが $\vec{c}=\left(5,\ \ 1\right)$ に等しいから

$k+l=5,\ \ 2k-l=1$

これを解いて　$k=2,\ l=3$

ゆえに　$\boldsymbol{\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}}$

(2)　$\vec{d}=(0,\ -3)$

(1)と同様に

$k\vec{a}+l\vec{b}=\left(k+l,\ \ 2k-l\right)$

これが $\vec{d}=\left(0,\ \ -3\right)$ に等しいから

$k+l=0,\ \ 2k-l=-3$

これを解いて　$k=-1,\ l=1$

ゆえに　$\boldsymbol{\vec{d}=-\vec{a}+\vec{b}}$

（教科書 p.61）

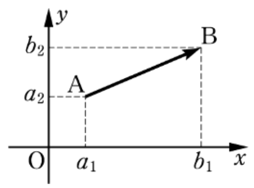
一般に，2 点 A，B に対して，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の成分表示と大きさは次のようになる。

座標と成分表示

$A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ のとき

1 $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\boldsymbol{b_1 - a_1},\ \boldsymbol{b_2 - a_2})$

2 $|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}| = \sqrt{(\boldsymbol{b_1 - a_1})^2 + (\boldsymbol{b_2 - a_2})^2}$



問20 3 点 $A(-2,\ 6)$，$B(3,\ -1)$，$C(3,-4)$ について，次のベクトルを成分表示し，その大きさを求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (3-(-2),\ -1-6)$

$= (\boldsymbol{5},\ \boldsymbol{-7})$

$|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}| = \sqrt{5^2+(-7)^2} = \boldsymbol{\sqrt{74}}$

(2) $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{BC}} = (3-3,\ -4-(-1))$

$= (\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{-3})$

$|\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}| = \sqrt{0^2+(-3)^2} = \sqrt{9} = \boldsymbol{3}$

(3) $\overrightarrow{CA}$

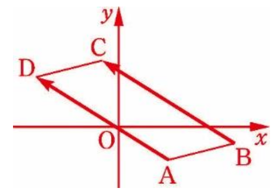
$\overrightarrow{\boldsymbol{CA}} = (-2-3,\ 6-(-4))$

$= (\boldsymbol{-5},\ \boldsymbol{10})$

$|\overrightarrow{\boldsymbol{CA}}| = \sqrt{(-5)^2+10^2} = \sqrt{125} = \boldsymbol{5\sqrt{5}}$

例題 3 平面上に 3 点 $A(3,\ -2)$，$B(7,\ -1)$，$C(-1,\ 4)$ がある。四角形 ABCD が平行四辺形となるような点 D の座標を求めよ。

解 点 D の座標を$(x,\ y)$とする。四角形 ABCD が平行四辺形となるための条件は$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ であるから



$(x-3,\ y-(-2)) = (-1-7,\ 4-(-1))$

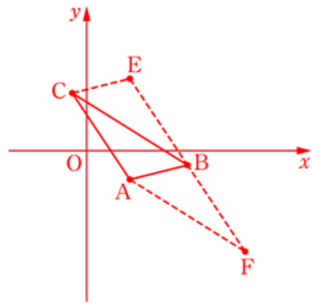
よって　$x-3=-8,\ y+2=5$

したがって　$x=-5,\ y=3$

ゆえに　$D(-5,\ 3)$

問21 例題 3 の 3 点 A，B，C を頂点にもつ平行四辺形は 3 つある。他の 2 つの平行四辺形の残りの頂点の座標を求めよ。

次の図のような 2 点 E，F を考える。



$E(x_1,\ y_1)$，$F(x_2,\ y_2)$ とすると，四角形ABEC，AFBC は平行四辺形になる。

平行四辺形 ABEC において，$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ であるから

$(7-3,\ -1-(-2)) = (x_1-(-1),\ y_1-4)$

よって　$x_1+1=4$，$y_1-4=1$

したがって　$x_1=3$，$y_1=5$

ゆえに　$E(\boldsymbol{3},\ \boldsymbol{5})$

平行四辺形 AFBC において，$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB}$ であるから

$(x_2-3,\ y_2-(-2)) = (7-(-1),\ -1-4)$

よって　$x_2-3=8$，$y_2+2=-5$

したがって　$x_2=11$，$y_2=-7$

ゆえに　$F(\boldsymbol{11},\ \boldsymbol{-7})$

ベクトルの平行

（教科書 p.62）

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，次のことが成り立つ。

ベクトルの平行条件
$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき $\boldsymbol{\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}} \iff \boldsymbol{(b_1,\ b_2)=k(a_1,\ a_2)}$ となる実数 $\boldsymbol{k}$ がある

問22 $\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-3,\ y)$ が平行になるような y の値を求めよ。

$\vec{a}/\!/\vec{b}$ であるから，k を実数として

$\vec{b}=k\vec{a}$

よって　$(-3,\ y)=k(1,\ -2)$

$=(k,\ -2k)$

したがって　$-3=k$, $y=-2k$

$k=-3$ であるから　$\boldsymbol{y=6}$

例 6 $\vec{a}=(4,\ 3)$ と平行で，大きさが 4 であるベクトル $\vec{b}$ を求めてみよう。

k を実数として　$\vec{b}=k\vec{a}=k(4,\ 3)=(4k,\ 3k)$　……①

となり，$|\vec{b}|=\sqrt{(4k)^2+(3k)^2}=4$ を満たす。

これより，$25k^2=16$ であるから　$k=\pm\dfrac{4}{5}$

よって，①より求めるベクトルは　$\left(\dfrac{16}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{16}{5},\ -\dfrac{12}{5}\right)$

問23 $\vec{a}=(-2,\ 2)$ と平行で，大きさが 3 であるベクトルを求めよ。

求めるベクトルを $\vec{b}$ とすると，k を実数として

$\vec{b}=k\vec{a}=k(-2,\ 2)=(-2k,\ 2k)$　……①

となり，$|\vec{b}|=\sqrt{(-2k)^2+(2k)^2}=3$ を満たす。

これより，$8k^2=9$ であるから　$k=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

よって，①より求めるベクトルは

$\boldsymbol{\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)}$

例題 4 $\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ -4)$, $\vec{c}=(-1,\ 2)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるような実数 t の値を求めよ。

解 $(\vec{a}+t\vec{b})\,/\!/\,\vec{c}$ であるから，k を実数として $\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}$ と表される。

よって　$(3,\ -2)+t(1,\ -4)=k(-1,\ 2)$

$(3+t,-2-4t)=(-k,2k)$

したがって　$3+t=-k$, $-2-4t=2k$

ゆえに　$t=2$

問24 $\vec{a}=(6,\ -1)$, $\vec{b}=(-3,\ 2)$, $\vec{c}=(1,\ -1)$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるような実数 t の値を求めよ。

$(\vec{a}+t\vec{b})\,/\!/\,\vec{c}$ であるから，k を実数として

$\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}$

と表される。

よって　$(6,\ -1)+t(-3,\ 2)=k(1,\ -1)$

$(6-3t,\ -1+2t)=(k,\ -k)$

したがって　$6-3t=k$, $-1+2t=-k$

ゆえに　$\boldsymbol{t=5}$