3 連立不等式の表す領域

（教科書 p.100）

例 3 連立不等式

$$\begin{cases} x-2y>-1 & \cdots\cdots① \\ x+y>2 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

の表す領域を求めてみよう。

①より　　　$y<\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

よって，①の表す領域は

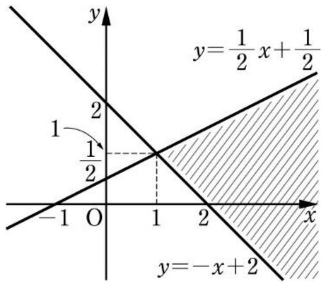
　直線 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ の下側

②より　　　$y>-x+2$

よって，②の表す領域は

　直線 $y=-x+2$ の上側

したがって，求める領域は図の斜線部分となる。ただし，境界線は含まない。

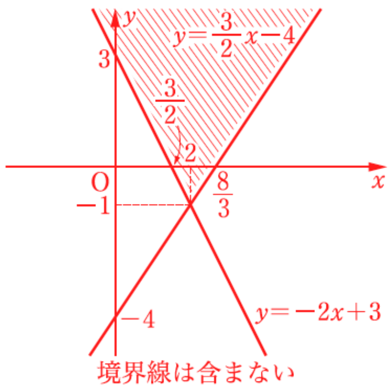


問8 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} 2x+y>3 \\ 3x-2y<8 \end{cases}$$

$y>-2x+3$　かつ　$y>\frac{3}{2}x-4$

したがって，求める領域は次の図の斜線部分となる。



問9 第 1 象限は，どのような連立不等式の表す領域といえるか。また第 2 象限，第 3 象限，第 4 象限についてはどうか。

第 1 象限　第 2 象限　第 3 象限　第 4 象限

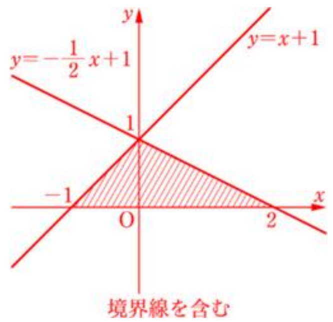
$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$　$\begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases}$　$\begin{cases} x<0 \\ y<0 \end{cases}$　$\begin{cases} x>0 \\ y<0 \end{cases}$

問 10 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x+2y-2\leqq 0 \\ x-y+1\geqq 0 \\ y\geqq 0 \end{cases}$$

$y\leqq -\frac{1}{2}x+1$　かつ　$y\leqq x+1$　かつ　$y\geqq 0$

したがって，求める領域は次の図の斜線部分となる。



例題 5 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x^2+y^2>4 & \cdots\cdots① \\ y<x+1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

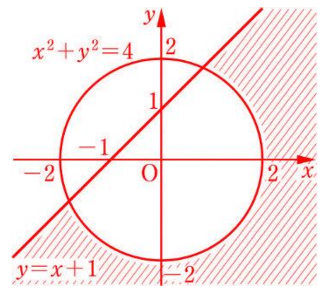
解 ①の表す領域は

　円 $x^2+y^2=4$ の外部

②の表す領域は

　直線 $y=x+1$ の下側

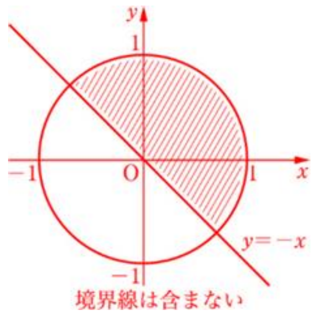
与えられた連立不等式の表す領域は，①，②の表す領域の共通部分であるから，図の斜線部分となる。ただし，境界線は含まない。



問 11 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

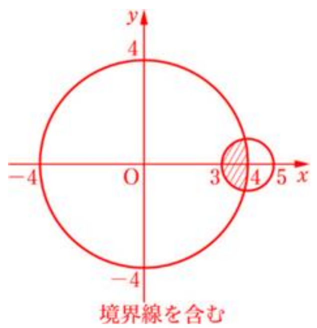
(1) $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2+y^2<1 \end{cases}$

直線 $y=-x$ の上側　かつ　円 $x^2+y^2=1$ の内部である。
したがって，求める領域は次の図の斜線部分となる。



(2) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 16 \\ (x-4)^2+y^2 \leqq 1 \end{cases}$

円 $x^2+y^2=16$ の内部および周　かつ　円 $(x-4)^2+y^2=1$ の内部および周である。
したがって，求める領域は次の図の斜線部分となる。

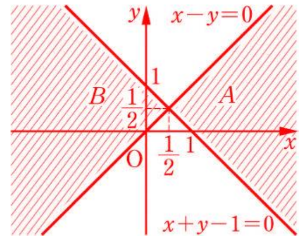


例題 6 不等式 $(x-y)(x+y-1)>0$ の表す領域を図示せよ。

解 与えられた不等式は

$\begin{cases} x-y>0 \\ x+y-1>0 \end{cases}$ ……① または $\begin{cases} x-y<0 \\ x+y-1<0 \end{cases}$ ……②

が成り立つことと同値である。
①の表す領域を A，②の表す領域を B とすると，求める領域は，A と B の和集合 $A \cup B$ である。
これを図示すると，右の図の斜線部分となる。ただし，境界線は含まない。



問 12 不等式 $(3x-y+5)(x-2y+5) \leqq 0$ の表す領域を図示せよ。

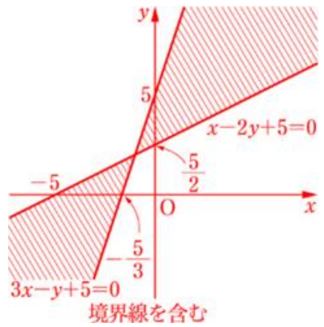
$(3x-y+5)(x-2y+5) \leqq 0$ より

$\begin{cases} 3x-y+5 \geqq 0 \\ x-2y+5 \leqq 0 \end{cases}$

または

$\begin{cases} 3x-y+5 \leqq 0 \\ x-2y+5 \geqq 0 \end{cases}$

したがって，求める領域は次の図の斜線部分となる。



領域を利用した証明

（教科書 p.102）

応用例題 7 次のことが成り立つことを証明せよ。

$$x^2+y^2<y \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2<1$$

考え方 それぞれの不等式の表す領域を図示して考える。

証明 不等式 $x^2+y^2<y$ の表す領域を A,

不等式 $x^2+y^2<1$ の表す領域を B

とする。

$x^2+y^2<y$ は

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$$

と変形できるから，領域 A は，中心 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，半径 $\frac{1}{2}$ の円の内部で，境界線は含まない。

$x^2+y^2<1$ より，領域 B は，中心が原点 O，半径 1 の円の内部で，境界線は含まない。

右の図より

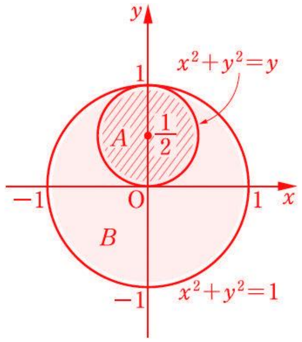
$$A \subset B$$

が成り立つ。

ゆえに

$$x^2+y^2<y \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2<1$$

が成り立つ。



問 13 次のことが成り立つことを証明せよ。

(1) $x^2+y^2 \leqq 8 \quad \Longrightarrow \quad x+y \leqq 4$

不等式 $x^2+y^2 \leqq 8$ の表す領域を A,

不等式 $x+y \leqq 4$ の表す領域を B とする。ただし，いずれも境界線を含む。

領域 A, B はそれぞれ右の図のようになり

$$A \subset B$$

が成り立つ。

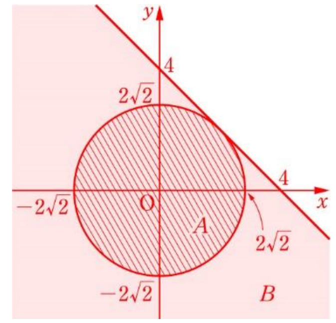
ゆえに

$$x^2+y^2 \leqq 8 \quad \Longrightarrow \quad x+y \leqq 4$$

が成り立つ。

（直線 $x+y-4=0$ と原点の距離は $2\sqrt{2}$ であるから，

円と直線は接する。）



(2) $x^2+y^2-6x-8y<0 \quad \Longrightarrow \quad x>0$ または $y>0$

不等式 $x^2+y^2-6x-8y<0$

すなわち　$(x-3)^2+(y-4)^2<25$

の表す領域を A，不等式 $x>0$ または $y>0$ の表す領域を B とする。

ただし，いずれも境界線を含まない。

領域 A, B はそれぞれ右の図のようになり

$$A \subset B$$

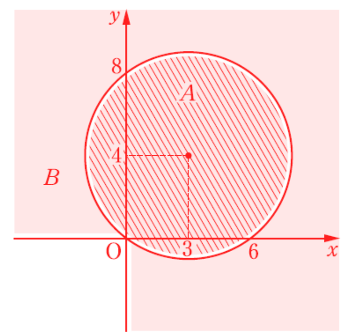
が成り立つ。

ゆえに

$$x^2+y^2-6x-8y<0$$

$$\Longrightarrow \quad x>0 \text{ または } y>0$$

が成り立つ。



領域と最大値・最小値

（教科書 p.103）

応用例題 8

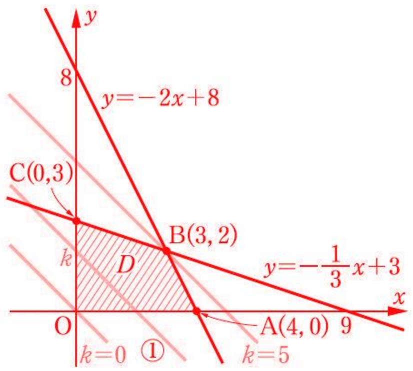
点 $(x,\ y)$ が連立不等式

$$x+3y \leqq 9,\quad 2x+y \leqq 8,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$$

の表す領域 D を動くとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

考え方 $x+y=k$ とおき，直線 $y=-x+k$ が領域 D と共有点をもつような k の値のうち，最大のものと最小のものを求めればよい。

解 領域 D は，右の図のように $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 2)$，$\mathrm{C}(0,\ 3)$ を頂点とする四角形の内部および周である。



$x+y=k$ とおくと

$$y=-x+k \quad \cdots\cdots ①$$

よって，①は傾きが -1，y 切片が k の直線である。この直線①が領域 D と共有点をもつような k の最大値と最小値を求める。

図より，k の値が最大になるのは直線①が頂点 B を通るときであり，最小になるのは直線①が原点 O を通るときである。

したがって，$x+y$ は　$x=3,\ y=2$ のとき　最大値 5

$x=0,\ y=0$ のとき　最小値 0

をとる。

問 14 点 $(x,\ y)$ が連立不等式

$$x-2y+3 \geqq 0,\quad 2x+y-4 \leqq 0,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$$

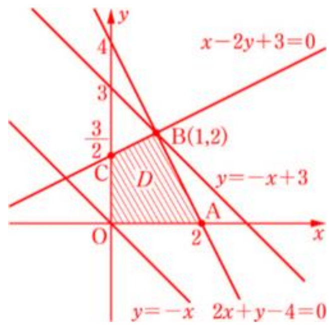
の表す領域 D を動くとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

この連立不等式の表す領域を D とする。

領域 D は下の図のように

$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$，$\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$

を頂点とする四角形の内部および周である。



$x+y=k$ とおくと

$$y=-x+k \quad \cdots\cdots ①$$

となるから，①は傾きが -1，y 切片が k の直線を表し，k の値が増加すると，下から上に移動する。図より，k の値が最大になるのは直線①が頂点 B を通るときであり，最小になるのは直線①が頂点 O を通るときである。したがって，$x+y$ は

$x=1,\ y=2$ のとき　**最大値 3**

$x=0,\ y=0$ のとき　**最小値 0**

問 題

（教科書 p.104）

１７ 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 2)$，$\mathrm{B}(5,\ 1)$ に対して，次の式を満たす点 P の軌跡を求めよ。

（1） $\mathrm{OP}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{OP}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ より

$$x^2+y^2=\{(x-4)^2+(y-2)^2\}+\{(x-5)^2+(y-1)^2\}$$

整理して　$x^2+y^2-18x-6y+46=0$

$$(x-9)^2+(y-3)^2=44$$

ゆえに，求める軌跡は**中心 $(9,\ 3)$，半径$2\sqrt{11}$ の円**である。

（2） $\mathrm{OP}^2+\mathrm{AP}^2=2\mathrm{BP}^2$

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{OP}^2+\mathrm{AP}^2=2\mathrm{BP}^2$ より

$$(x^2+y^2)+\{(x-4)^2+(y-2)^2\}=2\{(x-5)^2+(y-1)^2\}$$

整理して　$x=\frac{8}{3}$

ゆえに，求める軌跡は**直線 $x=\frac{8}{3}$** である。

１８ 点 P が直線 $2x-y-1=0$ 上を動くとき，点 $\mathrm{A}(-3,\ 1)$ と点 P を結ぶ線分 AP を 3：5 に内分する点 Q の軌跡を求めよ。

$\mathrm{P}(s,\ t)$ とすると，これは直線 $2x-y-1=0$上を動くから

$2s-t-1=0$　　　　　……①

$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると，Q は線分 AP を 3：5 に内分する点であるから

$$x=\frac{-15+3s}{3+5},\quad y=\frac{5+3t}{3+5}$$

すなわち　$s=\frac{8x+15}{3}$，$t=\frac{8y-5}{3}$

これらを①に代入すると

$$2\cdot\frac{8x+15}{3}-\frac{8y-5}{3}-1=0$$

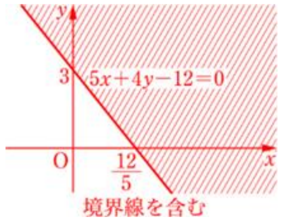
整理して　$2x-y+4=0$

ゆえに，点 Q の軌跡は**直線 $2x-y+4=0$** である。

１９　次の不等式の表す領域を図示せよ。

（1）　$5x+4y-12 \geqq 0$

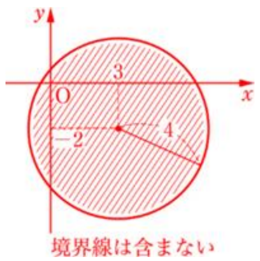
求める領域は次の図の斜線部分となる。



⑵　$x^2+y^2-6x+4y<3$

$(x-3)^2+(y+2)^2<16$

したがって，求める領域は次の図の斜線部分となる。



⑶　$(x^2+y^2-1)(2x-y-1)<0$

$\begin{cases} x^2+y^2-1>0 \\ 2x-y-1<0 \end{cases}$

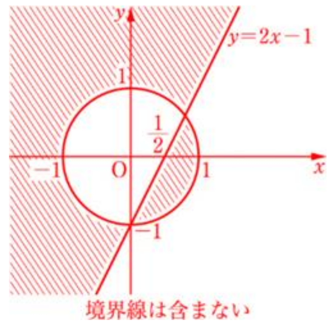
または

$\begin{cases} x^2+y^2-1<0 \\ 2x-y-1>0 \end{cases}$

すなわち

$\begin{cases} x^2+y^2>1 \\ y>2x-1 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x^2+y^2<1 \\ y<2x-1 \end{cases}$

したがって，求める領域は次の図の斜線部分となる。



２０　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $\begin{cases} x^2+y^2-25 \leqq 0 \\ x^2+y^2-9 \geqq 0 \end{cases}$

$x^2+y^2 \leqq 25$　かつ　$x^2+y^2 \geqq 9$

したがって，求める領域は次の図の斜線部分となる。

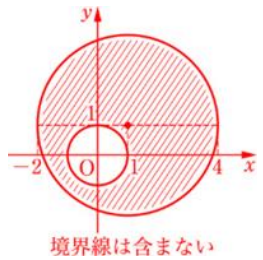
(2) $1 < x^2+y^2 < 2x+2y+7$

$1 < x^2+y^2$　かつ　$x^2+y^2 < 2x+2y+7$

すなわち

$x^2+y^2 > 1$　かつ　$(x-1)^2+(y-1)^2 < 9$

したがって，求める領域は次の図の斜線部分となる。



(3) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 4 \\ (x+1)(y-1) \geqq 0 \end{cases}$

$(x+1)(y-1) \geqq 0$ より

$\begin{cases} x+1 \geqq 0 \\ y-1 \geqq 0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x+1 \leqq 0 \\ y-1 \leqq 0 \end{cases}$

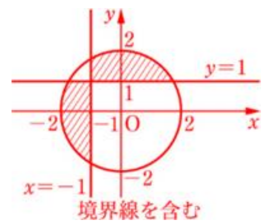
すなわち

$\begin{cases} x \geqq -1 \\ y \geqq 1 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x \leqq -1 \\ y \leqq 1 \end{cases}$

したがって

$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 4 \\ x \geqq -1 \\ y \geqq 1 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 4 \\ x \leqq -1 \\ y \leqq 1 \end{cases}$

したがって，求める領域は次の図の斜線部分となる。



２１ 次のことが成り立つことを証明せよ。

(1) $x^2+y^2-6x+8y+16<0 \quad \Longrightarrow \quad x>0$ かつ $y<0$

不等式 $x^2+y^2-6x+8y+16<0$

すなわち $(x-3)^2+(y+4)^2<9$

の表す領域を A,

不等式 $x>0$ かつ $y<0$ の表す領域を B とする。

ただし，いずれも境界線を含まない。

領域 A，B はそれぞれ次の図のようになり

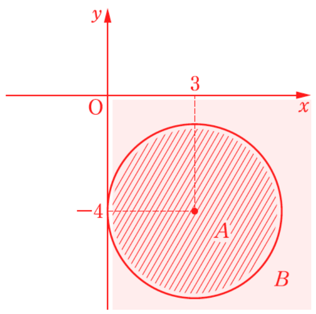
$A \subset B$

が成り立つ。

ゆえに

$x^2+y^2-6x+8y+16<0 \quad \Longrightarrow \quad x>0$ かつ $y<0$

が成り立つ。



(2) $x^2+y^2+2x-4y \geqq 15 \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2 \geqq 5$

不等式 $x^2+y^2+2x-4y \geqq 15$

すなわち $(x+1)^2+(y-2)^2 \geqq 20$

の表す領域を A,

不等式 $x^2+y^2 \geqq 5$ の表す領域を B とする。ただし，いずれも境界線を含む。

領域 A，B はそれぞれ次の図のようになり

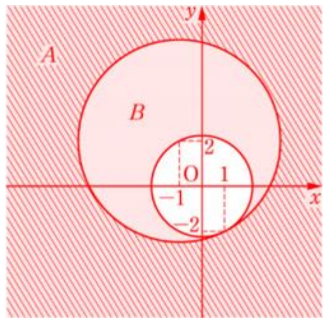
$A \subset B$

が成り立つ。

ゆえに

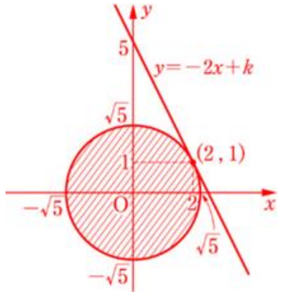
$x^2+y^2+2x-4y \geqq 15 \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2 \geqq 5$

が成り立つ。



２２　点 $(x,\ y)$ が不等式 $x^2+y^2 \leqq 5$ の表す領域を動くとき，$2x+y$ の最大値を求めよ。

不等式 $x^2+y^2 \leqq 5$ の表す領域は，次の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$2x+y=k$ とおくと

$$y=-2x+k \qquad \cdots\cdots①$$

①は，傾きが -2，y 切片が k の直線を表す。k の値が最大になるのは，直線①が円 $x^2+y^2=5$ と第 1 象限で接するときである。

①を円の方程式に代入して

$$x^2+(-2x+k)^2=5$$

$$5x^2-4kx+k^2-5=0 \qquad \cdots\cdots②$$

この 2 次方程式②が重解をもてばよいから，②の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)$$

$$=-k^2+25=0$$

よって　　$k=\pm5$

第 1 象限で接するから，$k>0$ より

$$k=5$$

このとき，②の解は，$D=0$ より

$$x=\frac{2k\pm0}{5}=\frac{2\cdot5}{5}=2$$

①より　　$y=-2\cdot2+5=1$

ゆえに　**最大値　5**　$(x=2,\ y=1$ のとき$)$

〔別解〕「①を円の方程式に代入して」以下を次のように解いてもよい。

直線①と円が接するのは，①と原点の距離が $\sqrt{5}$ のときであるから，点と直線の距離の公式により

$$\frac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$$

よって　　$k=\pm5$

第 1 象限で接するから，$k>0$ より

$$k=5$$

接点は直線①と，原点を通り①に垂直な直線 $y=\frac{1}{2}x$ の交点であるから

$$-2x+5=\frac{1}{2}x$$

よって　　$x=2$

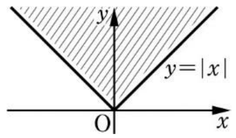
これを①に代入して　　$y=1$

ゆえに　最大値 5 $(x=2,\ y=1$ のとき$)$

参 考　いろいろな不等式の表す領域

（教科書 p.105）

例 1 不等式 $y > |x|$ の表す領域は，関数 $y = |x|$ のグラフである折れ線の（　上側　）である。ただし，境界線は含まない。



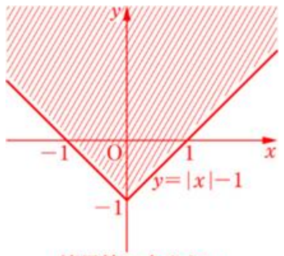
問1 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y > |x| - 1$

$x \geqq 0$ のとき　$y > x - 1$

$x < 0$ のとき　$y > -x - 1$

であるから，求める領域は，次の図の斜線部分となる。



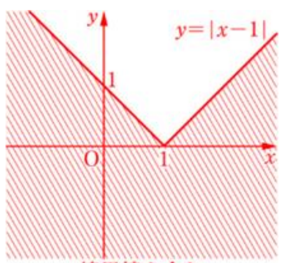
境界線は含まない

(2)　$y \leqq |x - 1|$

$x \geqq 1$ のとき　$y \leqq x - 1$

$x < 1$ のとき　$y \leqq -x + 1$

であるから，求める領域は，次の図の斜線部分となる。



境界線を含む

例 2 不等式 $|x| + |y| < 1$ の表す領域は

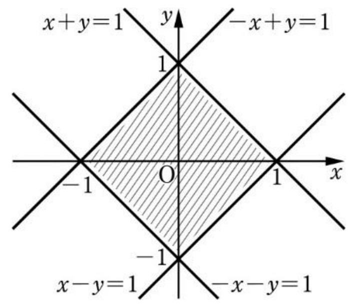
$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ のとき　$x + y < 1$

$x < 0,\ y \geqq 0$ のとき　$-x + y < 1$

$x < 0,\ y < 0$ のとき　$-x - y < 1$

$x \geqq 0,\ y < 0$ のとき　$x - y < 1$

であるから，右の図の斜線部分である。ただし，境界線は含まない。



問2 不等式 $|x| + |y| < 2$ の表す領域を図示せよ。

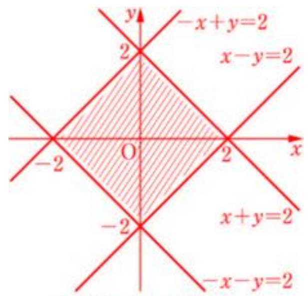
$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ のとき　$x + y < 2$

$x < 0,\ y \geqq 0$ のとき　$-x + y < 2$

$x < 0,\ y < 0$ のとき　$-x - y < 2$

$x \geqq 0,\ y < 0$ のとき　$x - y < 2$

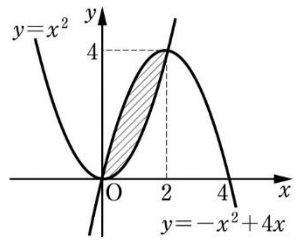
であるから，求める領域は，次の図の斜線部分となる。



境界線は含まない

例 3

連立不等式 $\begin{cases} y \geqq x^2 \\ y \leqq -x^2+4x \end{cases}$ の表す領域は，放物線 $y=x^2$ および，
その（　　上側　　）と，放物線 $y=-x^2+4x$ および，
その（　　下側　　）との共通部分である。ただし，境界線を含む。



問3　連立不等式 $\begin{cases} y \leqq \frac{1}{4}x^2 \\ y \geqq x^2-3 \end{cases}$ の表す領域を図示せよ。

求める領域は，次の図の斜線部分となる。