

① x の平均値を \bar{x} とすると

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(6+5+4+3+7) = \frac{25}{5} = {}^{\text{ア}}5$$

x の分散を s_x^2 とすると

$$s_x^2 = \frac{1}{5}\{(6-5)^2 + (5-5)^2 + (4-5)^2 + (3-5)^2 + (7-5)^2\} = \frac{10}{5} = {}^{\text{イ}}2$$

y の平均値を \bar{y} とすると

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(3+9+7+5+1) = \frac{25}{5} = {}^{\text{ウ}}5$$

y の分散を s_y^2 とすると

$$s_y^2 = \frac{1}{5}\{(3-5)^2 + (9-5)^2 + (7-5)^2 + (5-5)^2 + (1-5)^2\} = \frac{40}{5} = {}^{\text{エ}}8$$

また, x, y の共分散を s_{xy} とすると

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{5}\{(6-5)(3-5) + (5-5)(9-5) + (4-5)(7-5) + (3-5)(5-5) + (7-5)(1-5)\} \\ &= \frac{-12}{5} = {}^{\text{オ}}-2.4 \end{aligned}$$

よって, x と y の相関係数を r とすると

$$r = \frac{-2.4}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = -\frac{2.4}{4} = {}^{\text{カ}}-0.6$$

したがって, 負の相関がある。 (キ ①)

② 散布図から, 強い正の相関が認められる。

よって ①

③ X, Y, X', Y' のそれぞれについて,

平均値を $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{X}', \bar{Y}'$,

分散を $s_X^2, s_Y^2, s_{X'}^2, s_{Y'}^2$ とする。

また, X と Y の共分散を s_{XY} , 相関係数を r , X' と Y' の共分散を $s_{X'Y'}$, 相関係数を r' とする。

(1) $s_{X'}^2 = a^2 s_X^2$ が成り立つから, X' の分散は, X の分散の a^2 倍になる。 (ア ①)

(2) $s_{X'Y'} = ac s_{XY}$ が成り立つから, X' と Y' の共分散は, X と Y の共分散の ac 倍である。 (イ ②)

$$(3) r' = \frac{s_{X'Y'}}{s_{X'}s_{Y'}} = \frac{acs_{XY}}{|a|s_X|c|s_Y} = \frac{ac}{|ac|}r$$

よって, X' と Y' の相関係数は, X と Y の相関係数の $\frac{ac}{|ac|}$ 倍である。 (ウ ③)

【参考】 (変量の変換)

変量 X, Y が, n 個の値の組 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ であるとし, $k=1, \dots, n$ に対して, $X_k' = aX_k + b, Y_k' = cY_k + d$ が成り立つとき

$$\begin{aligned} ns_{X'}^2 &= (X_1' - \bar{X}')^2 + \dots + (X_n' - \bar{X}')^2 \\ &= \{(aX_1 + b) - (a\bar{X} + b)\}^2 + \dots + \{(aX_n + b) - (a\bar{X} + b)\}^2 \\ &= a^2\{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2\} \\ &= a^2 ns_X^2 \end{aligned}$$

よって, $s_{X'}^2 = a^2 s_X^2$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} ns_{X'Y'} &= (X_1' - \bar{X}')(Y_1' - \bar{Y}') + \dots + (X_n' - \bar{X}')(Y_n' - \bar{Y}') \\ &= \{(aX_1 + b) - (a\bar{X} + b)\}\{(cY_1 + d) - (c\bar{Y} + d)\} \\ &\quad + \dots + \{(aX_n + b) - (a\bar{X} + b)\}\{(cY_n + d) - (c\bar{Y} + d)\} \\ &= ac\{(X_1 - \bar{X})(Y_1 - \bar{Y}) + \dots + (X_n - \bar{X})(Y_n - \bar{Y})\} \\ &= ac ns_{XY} \end{aligned}$$

よって, $s_{X'Y'} = ac s_{XY}$ が成り立つ。